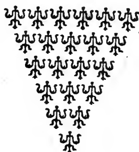
2

ABREGÉ
DES
ELÉMENS
DE
MATHEMATIQUES.

Par M. RIVARD, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris.

SECONDE PARTIE.

Géométrie, & Trigonométrie.



A SOLEURE,
Chez DANIEL SCHERER, Imprimeur & Libraire.

M. DCC. XLIV.

Digitized by Google

Digitized by Google



SECONDE PARTIE.

ÉLÉMENS DE GEOMETRIE.

LA GEOMETRIE est une partie des Mathématiques, qui traite de l'étenduë & de ses différens rapports.

Cette Science ne considere pas l'étendue en tant qu'elle est revêtuë des qualitez sensibles, telles que sont la dureté, la fluidité, la lumiere, les couleurs, &c. Mais son véritable objet est l'étenduë considerée en tant qu'elle a trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

L'étenduë en longueur considerée sans largeur & sans profondeur, se nomme *Ligne*.

L'étenduë en longueur & en largeur considerées ensemble indépendamment de la profondeur, se nomme *Surface*.

L'étenduë en longueur, en largeur & en profondeur considerées ensemble, se nomme *Solide*, & quelquefois *Corps*.

On appelle *Point* une partie d'étenduë si petite, qu'on la considere comme n'ayant aucune étenduë: telle est l'extremité d'une ligne.

Remarquez qu'il n'y a point d'étenduë qui n'ait les trois dimensions; ſçavoir, longueur, largeur & profondeur; & qu'il n'y a pas de point ſans étenduë: mais cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe conſidérer quelques-unes de ces dimenſions ſans les autres: par exemple, on peut conſidérer la longueur ſans la largeur & la profondeur; & de même on peut conſidérer la longueur & la largeur, ſans faire attention à la profondeur: enfin on peut conſidérer le point ſans aucune dimenſion.

Il y a donc ſeulement trois eſpeces d'étenduës, la ligne, la ſurface & le ſolide ou corps; c'eſt pourquoi nous diviſerons la Géométrie en trois Livres.

Dans le premier, nous traiterons des lignes.

Dans le ſecond, nous parlerons des ſurfaces.

Dans le troiſiéme, nous traiterons des ſolides.

Enfin, après ces trois Livres nous donnerons un traité de Trigonométrie, qui fera connoître ſenſiblement l'utilité de la Géométrie.

LIVRE PREMIER.

DES LIGNES.

NOUS ſuppoſerons dans ce Livre & dans le ſuivant, que toutes les lignes & toutes les ſurfaces dont nous parlerons, ſont ſur le même plan. Un plan eſt une ſurface dont les points ſont également élevés; telle eſt ſenſiblement la ſurface d'une glace bien polie, & celle d'une table bien unie.

Il y a trois ſortes de lignes, la droite, la courbe & la mixte.

1. La ligne droite eſt celle dont tous les points ſont dans la même direction : telle eſt la ligne AB. Art. I. Fig. 1.

2. La ligne courbe eſt celle dont tous les points ne ſont pas dans la même direction : telles ſont les lignes AEB & ADB.

3. La ligne mixte eſt celle qui eſt en partie droite & en partie courbe : telle eſt la ligne ABCD. Fig. 2.

Après ces notions, on peut regarder les trois propoſitions ſuivantes, comme des axiomes qui n'ont pas beſoin de démonſtration.

I.

4. On ne peut tirer qu'une ſeule ligne droite d'un point à un autre point ; mais on en peut tirer une infinité de courbes : cela paroît par la premiere Figure, dans laquelle il eſt évident qu'on ne peut tirer que la ſeule ligne droite AB, du point A au point B, quoi qu'on puiſſe tirer du premier point au ſecond pluſieurs lignes courbes, comme AEB & ADB. Fig. 1.

I I.

5. La ligne droite eſt la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à un autre point : par exemple, la ligne AB, tirée du point A au point B, eſt plus courte que chacune des trois lignes AEB, ADB & ACB ; c'eſt pourquoi la ligne droite eſt la meſure exacte de la diſtance qui eſt entre deux points.

I I I.

6. La poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points, enſorte que ſi on connoît la poſition de deux points, on connoît auſſi celle de la ligne entiere : nous nous ſervirons ſouvent de cet axiome dans la ſuite ; c'eſt pourquoi il eſt à propos de l'expliquer en peu de mots pour le faire bien concevoir.

Il eſt évident que pluſieurs lignes droites peuvent paſſer par un même point ; par exemple, la ligne CD

Fig. 3. & la ligne AB passent toutes les deux par le point E, on en peut même faire passer une infinité d'autres par ce point ; ainsi un seul point ne détermine pas la position ou la direction d'une ligne droite : mais si on prend deux points comme E & F, il n'est pas possible de faire passer par ces deux points d'autres lignes droites que CD : car il est clair que toutes les lignes droites qui passeroient par les deux points E & F, seroient couchées sur la ligne CD ; & par conséquent elles ne seroient pas différentes de cette ligne : donc deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite.

AVERTISSEMENT. Lorsqu'on ne trouvera point de figure citée pour un article, il faudra regarder celle qui aura été citée en dernier lieu à la marge. Ainsi dans le Corollaire suivant nous nous servirons de la troisiéme figure qui vient d'être citée.

7. Il suit du dernier axiome que deux lignes droites ne peuvent se couper que dans un seul point : car si deux lignes telles que AB & CD qui se coupent au point E, se coupoient encore en un autre point, comme chaque point d'intersection est commun aux deux lignes, ces deux lignes auroient deux points communs, & par conséquent la position d'une ligne droite ne dépendant que de deux points ; les deux lignes auroient tous les autres points communs, & ne feroient qu'une seule ligne droite ; ce qui est contre la supposition ou l'hypothese : ainsi deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point.

Ce Corollaire seroit évidemment faux, si on ne consideroit pas les lignes sans largeur ; car si les lignes étoient regardées comme ayant de la largeur, il est clair que le point d'intersection auroit de l'étenduë, & pourroit par conséquent être divisé en deux autres points qui seroient communs aux deux lignes.

8. Il suit encore du même axiome que si deux points, comme C & D, d'une ligne droite sont également éloi-

gnez de deux autres A & B, chaque point de la ligne CD sera à égale distance de ces deux points A & B; ainsi E est également distant de A & de B: c'est la même chose des autres points de la ligne CD. C'est une suite bien claire du troisiéme axiome.

9. Remarquez que quand on suppose que les deux points C & D sont également distans des deux autres points A & B, on ne veut pas dire que les points C & D sont également distans de A, & qu'ils le sont aussi également de B; mais on veut dire que le point C en particulier est également éloigné de A & de B; & pareillement que le point D est autant éloigné de A, qu'il est éloigné de B.

10. Les deux points C & D de la ligne CD étant encore supposés, chacun également éloignés de A & de B, non-seulement tous les points de la ligne CD sont également distans des deux points A & B; mais de plus, si elle est prolongée de part & d'autre, elle passera par tous les points également éloignés de A & de B: ensorte qu'il ne peut y avoir aucun point à côté de la ligne CD qui soit également distant des points A & B: soit, par exemple le point F qui est à côté de la ligne CD, je dis qu'il n'est point également distant de A & de B, ou, ce qui est la même chose, que les lignes FA & FB tirées du point F aux points A & B, ne sont point égales: car les deux lignes EA & EB sont égales, parce que tous les points de la ligne CD sont également éloignés de A & de B; par conséquent si on ajoûte FE à chacune de ces deux autres lignes égales, on aura encore deux lignes égales; sçavoir FEA & FEB, ou FB: or FA est plus courte que FEA (5); donc FA est aussi plus courte que FB; donc le point F n'est pas également distant des points A & B. On peut démontrer la même chose de tous les autres points qui sont à côté de la ligne CD; par conséquent cette ligne étant prolongée, passera par tous les points également éloignez de A & de B. Fig. 4.

AVERTISSEMENT. Lorſqu'un nombre eſt renfermé entre deux parentheſes, c'eſt une citation, c'eſt-à-dire, qu'il ſignifie que la propoſition qui le précede eſt prouvée par l'article déſigné par le nombre. Ainſi après avoir dit dans l'article précedent que la ligne FA eſt plus courte que FEA, on a mis (5) pour faire connoître que cette propoſition eſt prouvée par l'article 5.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

Entre les lignes courbes nous ne conſidérerons dans ces Élemens que la ligne circulaire, qui n'eſt autre choſe que la circonférence entiere, ou quelque partie de la circonférence d'un cercle.

11. On peut définir la circonférence d'un cercle, une ligne courbe qui termine une ſurface plane de tous cotés, & dont tous les points ſont également diſtans d'un point qu'on nomme *centre*. Il y a cette différence entre le cercle & la circonférence; que le cercle eſt l'eſpace renfermé dans la circonférence, & la circonférence eſt la ligne courbe qui termine cet eſpace.

Fig. 5. 12. Toute partie de la circonférence eſt appellée *arc*: ainſi AD, EIF, GLH ſont des arcs.

13. Toute ligne droite comme EF, terminée de part & d'autre par la circonférence, eſt appellée *corde*.

14. Si la corde paſſe par le centre, on la nomme *diamêtre*, comme AB.

15. Une ligne tirée du centre à la circonférence eſt appellée *rayon*; comme CD, CA, CB.

16. Les Géometres diviſent la circonférence de tout cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent *degrez*.

Chaque degré ſe diviſe en ſoixante parties égales, qu'on appelle *minutes*; chaque minute ſe diviſe en ſoixante parties égales, qu'on nomme *ſecondes*, & chaque ſeconde en ſoixante *tierces*, & ainſi de ſuite à l'in-

fini; enforte que par degré il ne faut pas entendre une grandeur abfoluë, mais feulement la trois cens foixantiéme partie de quelque circonférence que ce foit, grande ou petite; ainfi la plus petite circonférence a autant de degrez que la plus grande; mais elle les a plus petits à proportion; de même que chaque grandeur telle qu'elle foit, grande ou petite, a deux moitiés proportionnées à leur tout.

17. Si du même centre on décrit plufieurs circonférences, elles font appellées *concentriques*, auffi-bien que les cercles qu'elles renferment : comme dans la Figure 9.

18. Tous les rayons d'un cercle font égaux; c'eft une fuite de ce que le centre eft également diftant de tous les points de la circonférence.

19. Tous les diametres d'un cercle font égaux : car chaque diametre eft évidemment compofé de deux rayons, & par conféquent puifque tous les rayons font égaux, tous les diametres le font auffi.

20. Dans deux cercles égaux, les rayons & les diametres de l'un font égaux aux rayons & aux diametres de l'autre.

21. Tous les diametres divifent le cercle & la circonférence en deux parties égales : car tous les points de la circonférence étant également diftans du centre, la courbure de cette circonférence eft uniforme, c'eft-à-dire, qu'elle eft par tout égale; & par conféquent de quelque maniere que foit fitué le diametre, il partage toûjours le cercle & la circonférence en deux parties égales.

22. Dans le cercle les cordes égales foûtiennent des arcs égaux; & réciproquement les arcs égaux font foûtenus par des cordes égales : par exemple, fi les cordes EF & GH font égales, il faut que les arcs EIF & GLH qu'elles foûtiennent foient égaux : & fi ces arcs font égaux, il faut que les cordes EF & GH foient Fig. 5.

égales : car puiſque la courbure de la circonférence eſt uniforme ou égale dans toutes ſes parties, il eſt néceſſaire que les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux ſoient ſoûtenus par des cordes égales.

23. On peut dire pareillement que dans deux cercles égaux les cordes égales ſoûtiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux ſont ſoûtenus par des cordes égales : par exemple, ſi les cordes EF & ef ſont égales, il faut que leurs arcs ſoient égaux ; & ſi ces arcs ſont égaux, les cordes ſont égales. Cela paroîtra clairement, ſi l'on conçoit que la premiere circonference ſoit poſée ſur la ſeconde, enſorte que la corde EF ſoit appliquée ſur l'autre corde ef : car il eſt évident que les arcs ſeront poſés exactement l'un ſur l'autre, & qu'ils ſont par conſéquent égaux, auſſi-bien que les cordes.

24. Remarquez que quand on parle d'un arc ſoûtenu par une corde, il faut toûjours entendre celui qui eſt le plus petit : par exemple, ſi on parle de l'arc ſoûtenu par la corde EF, il faut entendre l'arc EIF, & non pas l'arc ELF, à moins qu'on ne marque expreſſément ce dernier.

25. Dans un cercle les cordes égales ſont également éloignées du centre, & reciproquement les cordes également éloignées du centre ſont égales. C'eſt encore une ſuite évidente de la parfaite uniformité de la circonférence.

26. Pareillement dans deux cercles égaux, les cordes égales ſont également éloignées des centres ; & reciproquement les cordes également éloignées des centres ſont égales.

Après avoir donné les notions des lignes tant droites que circulaires, & avoir expoſé pluſieurs propoſitions évidentes, fondées ſur la nature même de ces lignes, il eſt à propos de réſoudre pluſieurs problêmes ſur cette matiere.

PROBLÊME I.

27 *D'un point donné, comme* C, *pour centre & d'un intervalle aussi donné, comme* CA, *décrire une circonférence.* Fig. 5.

Ouvrez le compas de l'intervalle donné CA, mettez une de ses pointes sur le point donné C, faites ensuite tourner l'autre pointe en tenant toûjours la premiere immobile sur le point C, la ligne courbe que la seconde pointe décrira par ce mouvement, sera la circonférence cherchée.

Il est évident par cette opération que du même centre & du même intervalle on ne peut décrire qu'un cercle, & que tous les cercles qui sont décrits du même intervalle sont égaux.

PROBLÊME II.

28. *Trouver une ligne droite qui ait tous ses points également distans de deux autres points donnez, comme* A & B. Fig. 6.

Des deux points donnez A & B, & d'un même intervalle pris à discretion, décrivez des arcs qui se coupent en un point que nous appellerons C. Décrivez aussi des mêmes points donnez A & B, & de la même ouverture du compas deux autres arcs qui se coupent au-dessous en D; tirez la ligne CD, chacun de ses points sera également éloigné des deux points A & B; car ayant tiré les lignes AC & BC, elles seront rayons de cercles égaux, puisque C est le point d'intersection de deux arcs qui ont pour centre les points A & B & qui ont été décrits de la même ouverture du compas: donc ces lignes sont égales; par conséquent le point C est également éloigné de A & de B. Par la même raison le point D est également éloigné de A & de B; ainsi la ligne CD a deux points, sçavoir C & D, également distans de A & de B : donc tous les autres points de la ligne CD sont aussi (8) également distans de A & de B.

29. Quand nous avons dit qu'il falloit décrire les deux derniers arcs d'une même ouverture du compas, nous n'avons pas prétendu dire qu'ils fussent décrits de la même ouverture que les deux premiers ; mais seulement que les deux derniers arcs devoient être décrits l'un & l'autre d'une même ouverture du compas, laquelle peut être égale à celle dont on s'est servi pour les deux premiers arcs, ou differente.

On peut observer ici que les lignes ponctuées sont celles que l'on tire seulement pour la démonstration : telles sont les lignes AC & BC ; ou bien pour l'exécution d'un problême : tels sont les arcs qui ont été décrits des points A & B.

PROBLEME III.

30. *Couper une ligne droite, comme* AB, *en deux parties égales.*

Trouvez par le problême précedent, la ligne CD qui ait tous ses points également distans des deux extrêmitez A & B de la ligne donnée A B ; le point d'intersection M coupera la ligne donnée en deux parties égales : car ce point M étant un des points de la ligne CD, il doit être également éloigné de A & de B.

Fig. 7. 31. Il faut faire la même chose pour couper un arc, comme AB, en deux parties égales.

On enseignera dans le problême IV, sur les lignes proportionnelles, la méthode de couper une ligne droite en plusieurs parties égales.

PROBLEME IV.

32. *Faire passer une circonférence par trois points donnez, tels que* A, B, C.

Fig. 8. Tirez la ligne droite EF, dont les points soient également distans des deux points A & B (28) ; ensuite tirez la ligne droite GH, dont tous les points soient également distans des deux points C & B, le point K dans

lequel les deux lignes se couperont, sera le centre du cercle; ensorte que si du point K & de l'intervalle KA on décrit une circonférence, elle passera par les trois points, A, B, C.

Pour le démontrer, il n'y a qu'à faire voir que le point K est également éloigné des trois points A, B, C; ce qui est très-facile: car premierement, ce point K en tant qu'il appartient à la ligne EF, est également éloigné de A & de B, puisque par la construction, c'est-à-dire, par la maniere dont on a supposé que la ligne EF a été tirée, tous les points de cette ligne sont également distans de A & de B: secondement, en tant que le point K appartient à la ligne GH, il est également éloigné de B & de C; parce que tous les points de GH sont aussi par la construction également distans de B & de C; par conséquent le point K est également éloigné des trois points donnez: donc le problême est résolu.

33. Remarquez que si les trois points donnez étoient disposez en ligne droite, le problême seroit impossible, parce qu'une ligne droite ne peut être coupée qu'en deux points par une circonférence.

PROBLEME. V.

34. *Trouver le centre d'une circonférence ou d'un arc donné.* Prenez les trois points A, B, C, dans cette circonférence, ou dans cet arc donné, cherchez par le problême précedent le centre d'un cercle qui passe par ces trois points A, B, C, ce sera celui de l'arc proposé.

Des differentes positions des Lignes.

35. Nous avons d'abord considéré les lignes droites en elles-mêmes, sans les regarder les unes par rapport aux autres; présentement nous allons les comparer ensemble. Lorsqu'on compare deux lignes droites l'une avec l'autre; ou bien elles sont tellement disposées

qu'elles ſe rencontrent ou du moins qu'elles ſe rencontreroient ſi elles étoient prolongées ; ou bien elles ſont diſpoſées de maniere qu'elles ne ſe rencontreroient jamais, quand même elles ſeroient prolongées à l'infini ; auquel cas on les appelle *paralleles*. Lorſquelles ſe rencontrent, cela peut encore arriver en deux manieres : premierement, enſorte que l'une ne panche ni d'un côté ni d'autre de celle qu'elle rencontre, & pour lors on les appelle *perpendiculaires* : ſecondement, en ſorte que l'une panche plus d'un côté que de l'autre de celle qu'elle rencontre, & alors on les appelle *obliques*.

Les lignes perpendiculaires & les obliques forment par leur rencontre des *angles* dont nous parlerons d'abord, après quoi nous traiterons des perpendiculaires & des obliques, & enſuite des paralleles.

DES ANGLES.

Fig 9. 36. Un angle eſt l'ouverture de deux lignes qui ſe rencontrent en un point qu'on appelle le *ſommet* ou la *pointe* de l'angle : telle eſt l'ouverture des deux lignes CA & CB.

37. Les deux lignes qui par leur rencontre forment l'angle, s'appellent *côtez* de l'angle : telles ſont les lignes CA & CB.

Un angle peut ſe marquer par une ſeule lettre qui eſt au ſommet ; mais on le marque plus ordinairement par trois lettres, & pour lors on met toûjours celle qui déſigne le ſommet à la ſeconde place ; ainſi pour déſigner l'angle de la Figure 9, on dita l'angle ACB ou l'angle BCA, en mettant à la ſeconde place la lettre C qui eſt au ſommet : cela s'obſerve, ſoit que l'on parle, ſoit que l'on écrive. Ce même anglé peut être déſigné par la ſeule lettre C qui eſt au ſommet.

On peut diviſer l'angle en le conſidérant par rapport à ſes côtez, ou par rapport à ſa grandeur. L'angle conſideré ſelon ſes côtez ſe diviſe en *rectiligne*, *curviligne* & *mixtiligne*.

38. L'angle rectiligne eſt celui dont les deux côtez ſont des ignes droites.

39. L'angle curviligne eſt celui dont les deux côtez ſont des lignes courbes.

40. L'angle mixtiligne eſt celui dont un des côtez eſt une ligne droite, & l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlerons ici que des angles rectilignes, qui ſont les ſeuls dont la connoiſſance ſoit néceſſaire dans les Elemens de Géométrie.

41. Remarquez que la grandeur d'un angle ne dépend point de la longueur des côtez, mais ſeulement de l'ouverture ou de l'inclinaiſon de ces côtez : c'eſt pourquoi l'angle *a*C*b* eſt égal à l'angle ACB, ou plutôt c'eſt le même angle ; quoique les deux côtez C*a* & C*b* ſoient plus courts que les côtez CA & CB.

42. Un angle, comme ACB, qui a ſon ſommet au centre du cercle, a pour meſure l'arc AB compris entre ſes côtez : car il eſt évident que cet arc devient plus grand ou plus petit à proportion que l'ouverture des côtez eſt plus grande ou plus petite. Or nous venons de dire que c'eſt de la ſeule ouverture des côtez que dépend la grandeur de l'angle.

Il eſt indifférent que l'arc qui doit ſervir de meſure à un angle, ſoit décrit à une plus grande ou à une moindre diſtance du ſommet : car ſoit que la circonférence qui a pour centre le ſommet de l'angle ſoit grande ou petite, l'arc compris entre les côtez de l'angle eſt toûjours de la même grandeur relative ; c'eſt-à-dire, que cet arc contient le même nombre de degrez ; par exemple, l'arc *ab* contient autant de degrez que l'arc AB ; puiſque ſi l'un eſt la huitiéme partie de ſa circonférence, il eſt clair que l'autre eſt auſſi la huitiéme partie de la ſienne.

43. Ces arcs de différens cercles qui contiennent un égal nombre de degrez, ſont appellez *proportionnels* ou *ſemblables*.

44. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que les angles ſont égaux, quand ils ont pour meſure des arcs égaux du même cercle, ou de cercles égaux, ou des arcs proportionnels de différens cercles.

Si on conſidere l'angle par rapport à ſa grandeur, on en diſtingue encore trois ſortes, le ***droit***, l'***obtus*** & l'***aigu***.

Fig. 10. 45. L'angle droit eſt celui qui a pour meſure un arc qui contient 90 degrez, ou le quart de la circonférence: tel eſt l'angle DCB.

Fig. 11. 46. L'angle obtus eſt celui qui a pour meſure un arc qui contient plus de 90 degrez : tel eſt l'angle DCA.

47. L'angle aigu eſt celui qui a pour meſure moins de 90 degrez : tel eſt l'angle DCB.

L'angle obtus & l'angle aigu s'appellent l'un & l'aure *obliques* : c'eſt pourquoi on peut diviſer l'angle en droit & oblique, & ſubdiviſer enſuite l'angle oblique en obtus & aigu.

48. On peut conclurre des définitions précedentes que tous les angles droits ſont égaux, puiſqu'ils ont tous pour meſure 90 degrez ; mais tous les angles obtus ne ſont pas égaux ; car, par exemple, un angle de 95 degrez, & un angle de 100 degrez ſont obtus, parce que l'un & l'autre a plus de 90 degrez. Or il eſt viſible que ces deux angles ne ſont pas égaux : de même tous les angles aigus ne ſont pas égaux : par exemple, deux angles aigus, dont l'un eſt de 30 degrez & l'autre de 50, ne ſont pas égaux.

49. Remarquez qu'un angle obtus ne peut avoir 180 degrez, ou la demi-circonférence pour ſa meſure : car ſi on vouloit, par exemple, augmenter l'angle DCA, enſorte qu'il eût pour meſure la demi circonference, il faudroit appliquer le côté CD ſur le rayon CB ; auquel cas il eſt viſible qu'il n'y auroit plus d'angle, puiſque les côtez AC & CD ne feroient plus que la ligne droite ACB.

A l'occaſion des angles aigus & obtus, on diſtingue des complémens & des ſupplémens d'angles ou d'arcs.

50. Le complément d'un angle eſt ce qu'il faut ajoûter à cet angle, afin que la ſomme ſoit égale à un angle droit : par exemple, le complément de l'angle aigu ECB eſt l'angle DCE, qui, avec le premier, fait l'angle droit DCB. L'angle ECB eſt auſſi complément de DCE. Fig. 11.

51. Le ſupplément d'un angle eſt ce qu'il faut ajoûter à cet angle, afin que la ſomme ſoit égale à deux angles droits : par exemple, le ſupplément de l'angle ECB eſt l'angle ECA : de même l'angle ECB eſt ſupplément de l'autre ECA.

52. On peut dire la même choſe des arcs ; ainſi l'arc DE eſt le complément de l'arc EB, & cet arc EB eſt auſſi complément du premier ; parce que la ſomme de ces deux arcs eſt égale à l'arc DEB, qui eſt le quart de la circonférence : mais l'arc EDA eſt le ſupplément de l'arc EB, & l'arc EB eſt le ſupplément de l'arc EDA, parce que la ſomme de ces deux arcs eſt égale à la demi-circonférence. On confond aſſez ſouvent ces deux termes de *complémens* & de *ſupplémens* : nous nous en ſervirons ſuivant les notions que nous venons d'en donner.

53. Il paroît par ces définitions que les angles & les arcs qui ont des complémens ou des ſupplémens égaux, ſont égaux : & réciproquement lorſque les angles ou les arcs ſont égaux, les complémens ou les ſupplémens ſont égaux : par exemple, ſi les angles ECB & *ecb* ſont égaux, Fig. 12.
leurs complémens ECD & *ecd* ſont égaux : il en eſt de & 13.
même des ſupplémens.

THEOREME I.

54. *Une ligne droite tombant ſur une autre, forme deux angles, qui pris enſemble ſont égaux à deux angles droits*, c'eſt-à-dire, *qu'ils ont pour meſure 180 degrez, ou la demi-circonférence.* On ſuppoſe dans ce Theorême que la premiere ligne ne tombe pas ſur l'extrêmité de l'autre.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne CD qui tombe ſur la ligne AB : je dis
Fig. 11. que les deux angles DCA & DCB qu'elle forme, ont pour meſure la demi-circonférence : car ſi du point C comme centre, on décrit une circonférence, la ligne AB qui contient le centre en ſera diametre ; & par conſéquent elle coupera la circonférence en deux parties égales ; ainſi la partie ADB eſt la demi-circonférence. Or l'arc AD eſt la meſure de l'Angle DCA (42.), & l'arc DB, qui eſt le reſte de la demi-circonférence, eſt la meſure de l'angle DCB (42.) ; donc ces deux angles pris enſemble ont pour meſure la demi-circonférence : par conſéquent ils valent deux angles droits. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

55. Puiſque les angles DCA & DCB pris enſemble valent deux angles droits, il s'enſuit que ſi l'un des deux eſt droit, l'autre le ſera auſſi.

56. Remarquez que ſi la ligne qui tombe ſur l'autre n'incline ni d'un côté ni d'autre, comme la ligne DC, Fig. 10. elle forme deux angles égaux entr'eux, dont chacun eſt droit : mais ſi la ligne panche plus d'un côté que de l'autre, comme la ligne DC, Fig. 11. elle forme des angles inégaux, dont l'un eſt aigu & l'autre obtus, & qui pris enſemble valent toûjours deux angles droits, comme on vient de le prouver.

57. On démontreroit comme dans le Theorême, que ſi pluſieurs lignes tombent ſur un même point d'une autre ligne & du même côté ; tous les angles formez pris enſemble, ſont égaux à deux angles droits :
Fig. 14. par exemple, les angles ACD, DCE, ECF & FCB, formez par les trois lignes DC, EC & FC qui tombent ſur le point C de la ligne AB, ont pour meſure la demi-circonférence qui a été décrite du point C comme

comme centre ; par conſequent tous ces angles pris enſemble valent deux angles droits.

58. Enfin on peut faire voir encore de la même maniere que ſi pluſieurs lignes ſe coupent au même point, tous les angles qu'elles forment pris enſemble, ſont égaux à quatre angles droits ; c'eſt-à-dire, qu'ils ont pour meſure la circonférence entiére. Cela paroît par la figure 15 dans laquelle on a décrit une circonférence qui a pour centre le point C où les lignes ſe coupent, & qui eſt la meſure de tous les angles formez par les lignes qui ſe rencontrent. Fig. 15.

59. Nous allons établir un Theorême qui ſert à démontrer un grand nombre de propoſitions ; c'eſt ſur les *angles oppoſez au ſommet*. Les angles oppoſez au ſommet, ſont ceux qui ſont formez par deux lignes qui ſe coupent ; enſorte que l'un de ces angles eſt d'un côté du point d'interſection, & l'autre eſt du côté oppoſé : tels ſont les angles BCE & ACD, ou les angles ACE & BCD ; on les appelle auſſi *angles oppoſez par la pointe.* Il faut prendre garde que les angles BCE & ACE ne ſont pas oppoſez, non plus que les angles ACD & BCD ; c'eſt pourquoi il ne s'agit pas de ces angles comparez de cette maniere. Fig. 16.

THEOREME II.

60. *Les angles oppoſez au ſommet ſont égaux* : BCE, *par exemple, eſt égal à* ACD.

DEMONSTRATION.

Du point d'interſection des deux lignes qui forment ces angles ſoit décrire une circonférence, elle ſera coupée en deux parties égales par les lignes AB & DE ; qui en ſont des diamêtres ; donc l'arc AEB & l'arc DAE ſeront chacun une demi-circonférence ; & par conſéquent ils ſeront égaux ; ſi donc on en retranche la partie commune AE, les reſtes ſeront encore égaux.

Or le reste de la premiere demi-circonférence est EB, & le reste de la seconde est DA ; ainsi ces deux arcs EB & DA sont égaux : mais ces arcs sont les mesures des angles BCE & ACD (42.) ; donc ces angles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer de même que les deux autres angles ACE & BCD qui sont aussi opposez au sommet sont égaux entre eux.

PROBLÊME I.

Fig. 17. 61. *Faire sur une ligne donnée comme* AB, *un angle égal à un autre angle tel que* GEF.

Du sommet de l'angle donné GEF décrivez un arc entre ses deux côtez ; ensuite de l'extrêmité A de la ligne donnée, & de la même ouverture du compas, décrivez un arc indéfini tel que BD, sur lequel vous prendrez avec le compas la partie BC égale à l'arc FG : après quoi vous tirerez une ligne du point A au point C, elle formera l'angle CAB égal à l'angle donné : ce qui est évident, puisque ces angles ont pour mesure des arcs égaux.

PROBLÊME II.

Fig. 18. 62. *Couper un angle, comme* A, *en deux parties égales.*

Du point A comme centre & d'un intervalle pris à discretion, décrivez l'arc BC ; ensuite des deux points B & C pris pour centres, décrivez deux arcs de la même ouverture du compas qui se coupent en un point, comme D ; enfin tirez une ligne droite du point A au point D ; elle coupera l'angle BAC en deux parties égales ; car la ligne AD coupant l'arc BC en deux parties égales (31.), il faut aussi qu'elle coupe en deux parties égales l'angle BAC donc l'arc BC est la mesure.

Nous parlerons dans la suite de la mesure des angles qui n'ont pas leur sommet au centre : mais on va voir lorsque nous traiterons des perpendiculaires, des

obliques, & sur-tout des paralleles, qu'il étoit nécessaire d'exposer les propositions précédentes touchant les angles avant de parler de ces lignes.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES & des Obliques.

63. Une ligne droite est perpendiculaire à l'égard d'une autre ligne droite lorsqu'elle tombe sur cette seconde sans pancher ni d'un côté ni de l'autre ; telle est la ligne AC. Il ne faut pas confondre la ligne droite avec la perpendiculaire, puisqu'une oblique est droite aussi-bien qu'une perpendiculaire. Fig. 19.

64. Une ligne est oblique sur une autre lorsqu'elle panche plus d'un côté que de l'autre : telle est la ligne FK. Fig. 10.

65. Puisque la ligne perpendiculaire ne panche ni d'un côté ni de l'autre, il s'ensuit selon ce que nous avons dit (56.) qu'elle forme deux angles égaux & droits ; au contraire la ligne oblique étant plus inclinée d'un côté que de l'autre, elle forme deux angles inégaux qui sont suplémens l'un de l'autre.

66. On peut dire aussi réciproquement que si une ligne tombant sur une autre forme des angles droits, & par conséquent égaux, elle est nécessairement perpendiculaire sur cette seconde : car faisant des angles égaux, elle n'incline ni d'un côté ni de l'autre ; ainsi elle est perpendiculaire suivant la notion que nous venons de donner de cette ligne ; & si la ligne qui tombe sur une autre, forme des angles inégaux, elle est oblique sur la seconde, parce que pour lors elle incline plus d'un côté que de l'autre.

67. Remarquez qu'une ligne ne peut être perpendiculaire à une autre, que cette seconde ne soit aussi perpendiculaire à la premiere. Car si on prolonge la perpendiculaire comme dans la Fig. 19, la perpendiculaire prolongée ACE faisant des angles droits sur Fig. 19.

la ligne BD, cette seconde ligne fait aussi nécessairement des angles droits sur la premiere ACE; & par conséquent elle lui est perpendiculaire. De même lorsqu'une ligne est oblique à une autre, cette seconde est aussi oblique à la premiere, ce qui paroîtra évidemment, si on prolonge la premiere au-delà du point de rencontre.

68. Une ligne étant perpendiculaire à une autre, si un des points de la premiere est également éloigné de
Fig. 11. deux points de la seconde, tous les autres points de la perpendiculaire sont également éloignez de ces deux points: par exemple, la ligne AC étant penpendiculaire sur BD, si le point A est également éloigné de B & de D, tous les autres points de la ligne AC sont aussi également éloignez de B & de D: car si le point E, ou tout autre point de la perpendiculaire n'étoit pas également éloigné de B & de D, il est évident que la ligne AC seroit plus inclinée d'un côté que de l'autre; par conséquent elle ne seroit plus perpendiculaire sur BD; ce qui est contre la supposition. Si au lieu du point A on avoit supposé le point C également éloigné de B & de D, on auroit prouvé de la même maniere que le point A ou le point E est également éloigné des deux points B & D. Il en est de même de tous les autres points de la perpendiculaire.

69. Il suit de là que si une ligne comme AC, est perpendiculaire à une autre telle que BD, & qu'un de ses points soit également éloigné des deux points B & D de cette autre ligne, la perpendiculaire prolongée passe par tous les points également éloignez de B & de D: car on vient de faire voir que pour lors tous les autres points de la perpendiculaire sont à égale distance de B & de D. Or cela posé, il faut qu'elle passe par tous les points également éloignez de B & de D (10.)

70. Mais si une ligne comme AC, n'étoit pas supposée perpendiculaire sur une autre, pour démontrer qu'elle

eſt effectivement perpendiculaire, il ne ſuffiroit pas de faire voir qu'un de ſes points, comme A, eſt également éloigné des deux points B & D de la ſeconde ligne BD; il faudroit démontrer que deux points, comme A & E, de la ligne AC ſont chacun également éloignez des deux points B & D, auquel cas la ligne AC ſeroit certainement perpendiculaire ſur la ligne BD, puiſqu'ayant deux de ſes points également éloignez de B & de D, tous les autres points ſeroient également diſtans des mêmes points B & D, & ainſi elle n'inclineroit ni d'un côté ni de l'autre; par conſéquent elle ſeroit perpendiculaire.

THEOREME I.

71. *On ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire d'un même point ſur une ligne donnée, comme* AB.

DEMONSTRATION.

Le point duquel on tire la perpendiculaire eſt ou hors de la ligne ou dans la ligne même. Or dans l'un & dans l'autre cas, on ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire d'un point ſur une même ligne. Fig. 22.

RREMIER CAS. Soit, par exemple, le point C hors de la ligne AB, je dis que de ce point on ne peut abaiſſer que la ſeule perpendiculaire CD: pour le démontrer je prends dans la ligne AB deux points, comme A & B, dont le point C ſoit également diſtant: cela poſé, je raiſonne ainſi: la ligne CD étant perpendiculaire ſur AB, & ſon point C étant également éloigné de A & de B, tous les autres points de la perpendiculaire CD doivent être auſſi également éloignez de A & de B (68.); donc le point D eſt également éloigné de A & de B. Or de là il s'enſuit que nulle autre ligne, telle que CF, tirée du point C ne peut être perpendiculaire ſur AB: car ſi CF étoit pérpendiculaire ſur AB, ſon point C étant également diſtant de A & de B,

tout autre point de la ligne CF feroit également diftant de A & de B (68.) Or le point F n'eft point également diftant de ces deux points, parce que le point D étant également éloigné de A & de B, il faut que le point F qui eft entre D & B, foit plus près de B que de A; donc la ligne CF n'eft pas perpendiculaire fur AB. Il en eft de même de toute autre ligne tirée du point C.

SECOND CAS. Si l'on prend le point D dans la ligne AB, je démontre de même que de ce point on ne peut élever que la feule perpendiculaire CD fur AB: car fi du point D, qui eft également éloigné de A & de B, on élevoit une autre ligne que DC, elle feroit à droite ou à gauche de la perpendiculaire DC; ainfi cette perpendiculaire DC paffant par tous les points également diftans de A & de B (69.), les points de cette autre ligne tirée du point D ne pourroient être à égale diftance de ces deux points A & B; par conféquent cette autre ligne ne pourroit être perpendiculaire fur AB (68.)

COROLLAIRE.

72. Deux lignes qui font chacune perpendiculaires à une troifiéme, ne peuvent jamais fe rencontrer, quoique prolongées à l'infini: car fi ces deux lignes fe rencontroient, il y auroit deux perpendiculaires tirées du même point; fçavoir, du point de rencontre, fur la troifiéme ligne: ce qui vient d'être démontré impoffible.

THEORÊME II.

73. *La perpendiculaire eft plus courte que l'oblique tirée du même point fur la même ligne.*

DEMONSTRATION.

Fig. 22. Soit la ligne CD perpendiculaire fur AB, & la ligne CF tirée du même point fur la ligne AB. Je dis que CD eft plus courte que CF: pour le démontrer il faut pro-

longer CD jusqu'au point H ; en sorte que HD soit égale à CD, & tirer l'Oblique HF qui est nécessairement égale à l'autre oblique CF ; car la ligne CH étant perpendiculaire sur AB, cette ligne AB est aussi perpendiculaire sur CH (67.) Or son point D est également distant des deux points C & H, puisque HD est égale à CD : par conséquent tout autre point, comme F, de la perpendiculaire AB (68.) est également distant de C & de H ; donc HF est égale à CF. Cela posé, je raisonne ainsi : la ligne droite CDH est plus courte que CFH (5.) ; donc la moitié de CDH est plus courte que la moitié de CFH. Or la moitié de CDH est CD & la moitié de CFH est CF ; donc la perpendiculaire CD est plus courte que l'oblique CF. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

74. Puisque la perpendiculaire est la plus courte ligne que l'on puisse tirer d'un point sur une ligne ; il s'ensuit que la perpendiculaire est la mesure de la distance d'un point à une ligne : par exemple, la perpendiculaire CD est la mesure de la distance du point C à la ligne AB.

THEOREME III.

75. *De toutes les obliques tirées du même point sur une ligne, la plus éloignée de la perpendiculaire est la plus longue ; & celles qui sont également éloignées sont égales.*

DEMONSTRATION.

Du point C soient tirées sur la ligne AB les obliques CF & CG du même côté de la perpendiculaire, Fig. 22
& de l'autre côté l'oblique CE autant éloignée de la perpendiculaire que CF. 1°. L'oblique CG est plus longue que l'oblique CF. Pour le démontrer il faut

prolonger la perpendiculaire CD jusqu'au point H, en sorte que HD soit égal à CD, & du point H tirer les lignes HF & HG : il est facile de faire voir comme dans le Theorême précedent, que ces deux lignes sont égales aux obliques CF & CG ; ainsi CF est la moitié de CFH, & CG est la moitié de CGH. Or il est évident que CGH est plus longue que CFH, parce qu'elle se détourne davantage de la voie la plus courte, qui est CDH (5.) : donc l'oblique CG est aussi plus longue que l'oblique CF.

2°. Les obliques également éloignées CF & CE sont égales : car ayant tiré la ligne HE, il est évident que les deux lignes CFH & CEH sont égales, puisqu'elles s'écartent également de la ligne droite CDH ; par conséquent leurs moitiés CF & CE sont aussi égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

76. D'un même point, comme C, on ne peut tirer que deux lignes égales sur une autre ligne, telle que AB ; car il est clair qu'on ne peut tirer que deux obliques également éloignées de la perpendiculaire, sçavoir, une de chaque côté.

77. On a supposé dans le Theorême précedent que les lignes obliques ont été tirées du même point ou de l'extrêmité de la même perpendiculaire : mais il est évident que si les obliques étoient tirées de l'extrêmité de perpendiculaires égales, ce seroit la même chose : par Fig. 23. & 24. exemple, les trois perpendiculaires AB, DE, GH, étant égales, l'oblique GL qui est plus éloignée de sa perpendiculaire que l'oblique DF ne l'est de la sienne, est plus longue que cette autre oblique ; & les deux obliques AC & DF, que l'on suppose également éloignées de leurs perpendiculaires, sont égales. Si on en vouloit avoir une démonstration sensible, il n'y auroit qu'à concevoir que les perpendiculaires égales, telles


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

que DE & GH ſont appliquées l'une ſur l'autre, en ſorte qu'elles ne ſoient plus qu'une même ligne; & pour lors les deux obliques GL & DF ſeroient tirées du même point, & la premiere ſeroit plus éloignée de la perpendiculaire, que la ſeconde, ce qui reviendroit au même cas que dans le Theorême précedent. Pareillement en concevant les perpendiculaires égales AB & DE appliquées l'une ſur l'autre, il paroîtra, comme dans le Theorême, que les obliques AC & DF ſont égales.

78. La ligne HL compriſe entre l'oblique GL & la perpendiculaire GH, laquelle meſure la diſtance de l'extrêmité de l'oblique à la perpendiculaire, eſt appellée *Eloignement de perpendicule.* De même BC eſt l'éloignement de perpendicule par rapport à l'oblique AC & à la perpendiculaire AB.

THEOREME IV.

79. *De ces trois choſes*, ſçavoir, *la Perpendiculaire, l'Oblique & l'Eloignement de perpendicule, ſi deux d'une part ſont égales aux deux correſpondantes d'une autre part, la troiſiéme d'un côté eſt égale à la troiſiéme de l'autre.*

DEMONSTRATION.

1°. Si la perpendiculaire AB & l'éloignement de perpendicule BC ſont égaux à la perpendiculaire DE & à l'éloignement de perpendicule EF, l'oblique AC eſt égale à l'oblique DF: c'eſt ce que nous avons démontré (77.), en faiſant voir que les obliques qui ſont tirées des extrêmitez de perpendiculaires égales, & qui en ſont également éloignées, ſont égales. Fig. 23.

2°. Si la perpendiculaire AB & l'oblique AC ſont égales à la perpendiculaire DE & à l'oblique DF, les éloignemens de perpendicule BC & EF ſont égaux: car ſi un des éloignemens de perpendicule, par exemple BC, étoit plus grand que l'autre, l'oblique AC ſeroit

aussi plus grande que l'oblique DF, puisqu'elle seroit plus éloignée de la perpendiculaire : ainsi les obliques ayant été supposées égales, il faut aussi que les éloignemens de perpendicule soient égaux.

3°. Si l'éloignement de perpendicule & l'oblique d'une part sont égaux à l'éloignement de perpendicule & à l'oblique d'une autre part, les perpendiculaires sont égales : car les éloignemens de perpendicule peuvent être considerez comme des perpendiculaires, & les perpendiculaires comme des éloignemens de perpendicule : par exemple, BC peut être regardé comme la perpendiculaire, & AB comme l'éloignement de perpendicule, en concevant que l'oblique AC est tirée du point C, extrêmité de la perpendiculaire au point A : par conséquent ce troisiéme cas se rapporte au second.

Fig. 22. 80. De ce que nous avons dit sur les perpendiculaires, il suit qu'il y a trois marques pour connoître si une ligne comme CD, est perpendiculaire à une autre, telle que AB ; la premiere, lorsqu'elle forme deux angles droits, & par conséquent égaux sur l'autre ligne (66.) ; la seconde, quand elle a deux de ses points également éloignez chacun de deux points de la seconde ligne (70) ; & la troisiéme, quand elle est la plus courte que l'on puisse tirer du point C sur la ligne AB. Les deux premieres marques sont évidentes par la définition même de la perpendiculaire, & la troisiéme est fondée sur le second Theorême.

PROBLEME.

81. *D'un point donné, comme C, tirer une perpendiculaire sur une ligne.*

Le point C peut être hors de la ligne, ou dans la ligne même : c'est pourquoi ce Problême a deux cas.

Fig. 15. 1°. Si le point C est hors de la ligne, de ce point C comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne en

deux points, tels que E & F; ensuite du point E & du point F, décrivez deux arcs de cercle de la même ouverture du compas, qui se coupent en un point D; enfin tirez une ligne droite qui passe par le point donné C, & par le point d'intersection des deux arcs, elle sera perpendiculaire à la ligne donnée AB.

2°. Si le point C est dans la ligne même, de ce point comme centre, décrivez une demi-circonférence qui coupe la ligne AB en deux points, desquels pris pour centres il faut décrire des arcs de la même ouverture du compas, & faire le reste comme dans le premier cas. Fig. 16.

Si dans le second cas le point C, duquel il faut tirer une perpendiculaire, étoit à l'extremité de la ligne donnée; pour lors il faudroit prolonger cette ligne au-delà du point C, & décrire de ce point comme centre une demi circonférence qui coupât la ligne prolongée; & le reste comme ci-dessus. Fig. 17.

Il est indifferent que l'on tire les deux arcs au-dessus ou au-dessous de la ligne donnée, pourvû qu'ils ne se coupent pas au point donné C; ce qui pourroit arriver lorsque ce point est hors de la ligne.

Il est évident qu'en observant cette méthode, la ligne tirée est perpendiculaire à la ligne donnée, puisque deux de ses points, sçavoir le point donné & le point d'intersection des deux arcs, sont également distans des deux points E & F de la ligne donnée.

DES LIGNES PARALLELES.

82. Les lignes *Paralleles* sont celles qui sont par tout également éloignées l'une de l'autre, ou ce qui est la même chose, qui sont tellement disposées que tous les points de l'une sont également éloignez de l'autre: telles sont les lignes CD & AB. De cette notion des paralleles on peut conclurre plusieurs propositions qui en sont des suites évidentes. Fig. 18.

83. 1°. Les paralleles prolongées à l'infini ne peuvent jamais se rencontrer, puisqu'elles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre.

84. 2°. Deux lignes AB & CD étant paralleles, si une troisiéme, comme XY, est parallele à une des deux, elle sera aussi parallele à l'autre; car cette troisiéme ligne ne peut être par tout également éloignée de l'une des deux paralleles, qu'elle ne soit aussi par tout à même distance de l'autre. Cela est vrai, lorsque XY est entre les deux lignes AB & CD, & quand elle est hors de ces deux lignes.

85. 3°. Les lignes, comme CA & DB, tirées d'une parallele perpendiculairement sur l'autre, sont egales; puisque ces perpendiculaires mesurent la distance d'une parallele à l'autre, laquelle est par tout égale.

Fig. 29. 86. 4°. Les obliques, comme EG & HL, également inclinées entre paralleles, sont égales entre elles : car si on tire les perpendiculaires EF & HK, elles seront égales : d'ailleurs les obliques étant supposées également inclinées, les éloignemens de perpendicule FG & KL sont égaux; par conséquent les obliques elles-mêmes seront égales (79).

Fig. 30. 87. 5°. Si plusieurs lignes paralleles également distantes sont coupées par une ligne, telle que AE, les parties de cette ligne comprises entre ces paralleles; sçavoir, AB, BC, CD, DE, sont égales entre elles. Cela paroît parce que ces différentes parties sont autant de lignes égalément inclinées entre des espaces paralleles égaux; ce qui est la même chose que si elles étoient également inclinées dans le même espace parallele : auquel cas elles seroient égales.

Fig. 31. 88. Deux lignes paralleles, comme IL & MN, coupées par une troisiéme ligne EF sont également inclinées vers le même point E sur cette troisiéme; car si les deux paralleles IL & MN n'étoient pas également inclinées sur EF vers le point E, ensorte que la parallele

inférieure fût plus inclinée vers ce point que l'autre parallele, ces deux lignes s'approcheroient l'une de l'autre; & par conséquent elles ne seroient pas paralleles; ce qui est contre l'hypothese.

Nous appellerons *Sécante* la ligne qui coupe les paralleles.

89. La secante forme avec les paralleles plusieurs angles qu'il faut remarquer : les uns sont entre les paralleles; on les nomme *Interieurs* ou *internes* : tels sont les angles A, B, C, D: les autres sont hors des paralleles, on les nomme *Extérieurs* ou *externes*; tels sont les angles G & H au-dessus, & O & P au-dessous. En comparant les angles soit internes, soit externes deux à deux, il y en a qu'on appelle *Alternes*; ce sont ceux dont l'un est dans la partie supérieure, & l'autre dans la partie inférieure, l'un à droite & l'autre à gauche de la sécante : par exemple, les angles A & D sont alternes internes, aussi-bien que les deux autres B & C, Pareillement les deux angles H & O sont alternes externes, de même que les deux autres G & P.

90. Deux angles formez par des paralleles, comme H & D, dont l'un est extérieur & l'autre intérieur du même côté de la sécante, sont égaux : car la grandeur des angles dépend de l'inclinaison des lignes. Or les deux paralleles sont également inclinées sur la sécante EF (88.); par conséquent les angles H & D que les paralleles forment sur EF sont égaux. Par la même raison l'angle extérieur P & l'angle intérieur B, qui sont au-dessous des paralleles du même côté de la sécante, sont aussi égaux. On peut faire voir de la même maniere que les angles G & C de l'autre côté de la sécante son égaux entre eux; comme aussi les angles O & A : c'est sur cette proposition qu'est fondée la démonstration du Théorême suivant.

Ces angles, dont l'un est extérieur, & l'autre intérieur du même côté de la sécante, nous les nomme-

rons *correſpondans*, parce qu'ils ſont ſituez de la même maniere par rapport aux deux paralleles.

THEOREME I.

91. *Si deux lignes ſont paralleles.* 1°. *Les angles alternes internes ſont égaux.* 2°. *Les angles alternes externes ſont égaux.* 3°. *Les deux angles intérieurs du même côté de la ſécante pris enſemble valent deux angles droits.* 4°. *Les deux angles extérieurs du même côté de la ſécante pris enſemble valent auſſi deux angles droits.*

DEMONSTRATION.

Soient les deux paralleles IL & MN, il faut prouver en premier lieu que les angles alternes A & D ſont égaux. L'angle A eſt égal à l'angle H, parce qu'ils ſont oppoſez au ſommet : l'angle D eſt auſſi égal à l'angle H, comme on vient de le faire voir ; par conſéquent les angles A & D ſont égaux. On prouveroit de même que les deux autres angles alternes internes B & C ſont égaux, à cauſe que chacun des deux eſt égal à l'angle G.

2°. Les angles alternes externes G & P ſont égaux : car l'angle G eſt égal à l'angle B, parce qu'ils ſont oppoſez au ſommet. D'ailleurs l'angle P eſt auſſi égal à l'angle B, puiſqu'ils ſont correſpondans : donc les deux angles G & P ſont égaux. On prouveroit de même que les deux angles alternes externes H & O ſont égaux, parce que chacun d'eux eſt égal à l'angle A.

3°. Les deux angles intérieurs B & D du même côté de la ſécante valent enſemble deux angles droits : car les deux angles H & B pris enſemble valent deux droits (54.) : donc ſi à la place de l'angle H on prend l'angle D qui lui eſt égal, la ſomme des angles B & D vaudra auſſi deux angles droits. On prouveroit de même que les deux angles intérieurs A & C valent enſemble deux angles droits, parce que les deux angles G & A valent deux droits.

4°. Les deux angles extérieurs H & P du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits : car les deux angles D & P pris ensemble valent deux angles droits (54) : donc si à la place de l'angle intérieur D on prend l'angle extérieur H qui lui est égal, la somme des angles H & P vaudra aussi deux angles droits. On peut prouver de même que les deux angles extérieurs G & O valent ensemble deux angles droits, parce que les deux angles C & O valent deux droits.

COROLLAIRE.

92. Les lignes IL & MN étant supposées paralleles, si la ligne EF est perpendiculaire sur une parallele MN, elle est aussi perpendiculaire à l'autre : car la sécante EF étant perpendiculaire sur MN, l'angle EFN est droit ; par conséquent l'angle alterne FEI est aussi droit : d'où il suit que la ligne EF est perpendiculaire sur IL. Fig. 32.

93. On a fait voir que si deux lignes comme IL & MN, sont paralleles, les angles correspondans H & D, formez sur ces paralleles du même côté de la sécante, sont égaux. Mais on peut dire réciproquement que si les deux angles H & D sont égaux, les deux lignes IL & MN sont paralleles. Car si les angles sont égaux, il faut que ces deux lignes soient également inclinées vers le même point E sur la sécante EF. Or les deux lignes IL & MN ne peuvent être également inclinées vers le même point E sur la sécante EF, sans être paralleles, c'est-à-dire, également distantes l'une de l'autre dans toute leur longueur ; car il est évident qu'une de ces lignes, par exemple MN, ne peut s'approcher ou s'éloigner de IL par une de ses extrémitez, à moins qu'elle ne soit plus ou moins inclinée sur la sécante que l'autre ligne IL. Par la même raison si l'angle extérieur P & l'angle intérieur B sont égaux, les lignes IL & MN sont paralleles. On peut faire voir de la même maniere que si les deux angles G & C sont Fig. 31.

égaux entre eux ou les deux autres O & A, les lignes IL & MN sont paralleles.

94. Nous avons dit que les deux lignes IL & MN ne peuvent être également inclinées & vers le même point E sur une troisiéme EF sans être paralleles : mais deux lignes peuvent être également inclinées vers différens points sur une troisiéme, sans que ces deux lignes soient paralleles. Cela paroît par la Fig. 33, dans laquelle les deux lignes IL & MN peuvent être également inclinées sur EF, quoiqu'elles ne soient pas paralleles, l'une étant inclinée vers E & l'autre vers F.

THEOREME II.

95. *Deux lignes sont paralleles, 1°. Si les angles alternes internes sont égaux. 2°. Si les angles alternes externes sont égaux. 3°. Si les deux intérieurs du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits. 4°. Si les deux extérieurs du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits.* Ce Théorême est la proposition inverse ou réciproque du premier.

DEMONSTRATION.

Fig. 31. Soient les deux lignes IL & MN coupées par la sécante EF. Il faut prouver en premier lieu, que si les angles alternes internes A & D sont égaux, ces lignes sont paralleles. L'angle H est toûjours égal à l'angle A, à cause qu'ils sont opposez au sommet : donc si les angles A & D sont égaux entre eux, les deux angles correspondans H & D sont aussi égaux ; & par conséquent les lignes IL & MN sont paralleles (93.) On peut prouver la même chose par rapport aux autres angles alternes internes B & C, qui ne peuvent être égaux, à moins que l'angle extérieur G ne soit égal à l'angle intérieur C.

2°. Si les angles alternes externes G & P sont égaux, les lignes IL & MN sont paralleles : car l'angle B est nécessairement égal à l'angle G : donc si les deux angles G & P sont égaux, les deux angles correspondans B & P

B & P ſont auſſi égaux ; & par conſéquent les lignes IL & MN ſont paralleles. (93.) On peut prouver la même choſe par rapport aux deux angles alternes externes H & O qui ne peuvent être égaux, à moins que l'angle interieur A ne ſoit égal à l'angle extérieur O.

3°. Si les angles intérieurs B & D du même côté de la ſécante valent enſemble deux angles droits, les lignes IL & MN ſont paralleles : car les angles H & B pris enſemble valent deux droits : (54.) par conſéquent ſi les angles B & D valent auſſi deux droits, il faut que les angles correſpondans H & D ſoient égaux entre eux : ainſi les lignes IL & MN ſont paralleles. On peut prouver la même choſe par rapport aux deux autres angles intérieurs A & C, qui ne peuvent valoir deux droits, à moins que l'angle extérieur G ne ſoit égal à l'angle intérieur C.

4°. Si les deux angles extérieurs H & P du même côté de le ſécante valent enſemble deux angles droits ; les lignes IL & MN ſont paralleles : car les deux angles D & P valent deux droits, (54.) donc ſi les angles H & P valent auſſi deux droits, il faut que l'angle extérieur H ſoit égal à l'intérieur D ; par conſéquent les deux lignes IL & MN ſont paralleles. On peut prouver la même choſe par rapport aux deux angles externes G & O, qui ne peuvent valoir deux angles droits, à moins que l'angle extérieur G ne ſoit égal à l'intérieur C du même côté de la ſécante.

On voit que la démonſtration des quatre cas de ce Théorême ne conſiſte qu'à prouver que dans l'hypotheſe de chacun de ces cas, les angles correſpondans ſont égaux ; & cela ſuffit : car quand les angles correſpondans ſont égaux, les lignes ſont néceſſairement paralleles.

COROLLAIRE.

96. Si la ligne EF eſt perpendiculaire aux deux au- Fig. 31.

tres IL & MN, ces deux lignes ſont paralleles : car EF étant perpendiculaire ſur IL & ſur MN, les angles alternes internes EFN & FEI ſont chacun droits, & par conſéquent égaux; donc les lignes IL & MN ſont paralleles.

La ligne EF ne peut pas être perpendiculaire ſur IL & ſur MN, que ces deux lignes ne ſoient perpendiculaires ſur EF; on peut donc dire en général que ſi deux lignes ſont perpendiculaires ſur une troiſiéme, elles ſont paralleles entre elles. Cette propoſition n'eſt pas différente du Corollaire précédent.

THEORÊME III.

Fig. 34. 97. *Si deux lignes paralleles, telles que* CD *&* AB *ſont compriſes entre deux autres lignes paralleles, comme* AC *&* BD, *les deux premieres ſont égales, & les deux autres compriſes entre les premieres ſont auſſi égales entre elles; & de plus les angles oppoſez, comme* A *&* D, *ſont égaux.*

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. Les deux lignes CD & AB ſont égales : car les lignes également inclinées entre paralleles ſont égales. (86.) Or les lignes CD & AB ſont entre les paralleles AC & BD; & d'ailleurs elles ſont également inclinées entre ces paralleles, (88.) puiſqu'elles ſont paralleles elles-mêmes; par conſéquent elles ſont égales. On démontrera de la même maniere que les deux paralleles AC & BD ſont égales.

II. PARTIE. Les angles oppoſez, comme A & D, ſont égaux entre eux : car l'angle A joint à l'angle B vaut deux angles droits; (91.) parce que ce ſont deux angles intérieurs du même côté de la ſécante AB, entre les paralleles AC & BD. Pareillement l'angle D joint à l'angle B, vaut auſſi deux angles droits, à cauſe des deux autres paralleles CD & AB; (91.) par conſéquent les deux angles oppoſez A & D ſont égaux entre eux.

On demontrera de la même maniere que les deux angles opposez B & C sont égaux, en les joignant chacun avec l'angle A ou D.

98. De ce que nous avons dit, on peut conclurre qu'il y a plusieurs marques pour connoître si deux lignes sont paralleles.

1°. Si deux perpendiculaires comprises entre ces deux lignes sont égales; car dans ce cas il y aura deux points d'une ligne qui seront également éloignez de l'autre ligne; par conséquent tous les autres points de la premiere seront également distans de la seconde; ainsi ces deux lignes seront paralleles.

2°. Si une même ligne est perpendiculaire à l'une & à l'autre. (96.)

3°. Si les angles, tels que H & D formez sur l'une & l'autre ligne du même côté (93.) par une troisiéme, sont égaux. Fig. 31.

4°. Si les angles soit alternes internes, soit alternes externes, sont égaux. (95.)

5°. Si les angles, soit intérieurs, soit extérieurs du même côté de la sécante pris ensemble, sont égaux à deux droits. (95.)

PROBLEME.

99. *Par un point donné* C, *tirer une parallele à une ligne donnée telle que* AB. Fig. 35.

Du point C & d'un intervalle pris à discrétion, tirez l'arc indéfini BD : ensuite du point B & de la même ouverture du compas décrivez l'autre arc AC, & prenez avec le compas sur le premier arc qui est indéfini, une partie BD égale à AC : enfin tirez une ligne droite qui passe par les deux points C & D : elle sera parallele à AB.

Cela est évident; car ayant tiré la ligne CB, il paroît que les angles alternes ABC & BCD sont égaux, puisqu'ils ont pour mesures les arcs égaux AC & BD : & par conséquent les deux lignes AB & CD sont paralleles. (95.)

Nous avons considéré jusqu'ici les lignes droites, ou en elles-mêmes, ou les unes par rapport aux autres, soit qu'elles se rencontrent, soit qu'elles ne se rencontrent jamais. Nous allons les considérer dans la suite en tant qu'elles ont rapport à la circonférence d'un cercle.

DES LIGNES DROITES, considérées par rapport au Cercle.

Les lignes droites qui ont rapport au cercle, sont tirées ou d'un point hors du cercle & de la circonférence, ou d'un point en dedans du cercle, ou d'un point de la circonférence même.

100. Dans le premier cas, lorsqu'une ligne est tirée d'un point hors du cercle, si elle coupe la circonférence, elle est appellée *sécante extérieure* : mais si elle touche la circonférence sans la couper, quoiqu'elle soit prolongée, on l'appelle *tangente*.

Fig. 37. Les lignes AB & AD de la Figure 37 sont des sécantes extérieures : & la ligne ABD, Figure 43, est une tangente.

101. Dans le second cas, lorsque la ligne droite est tirée d'un point en dedans du cercle, elle est appellée *sécante intérieure* ; telles sont les lignes AB & AD de la

Fig. 39. Figure 39 : mais si la ligne est tirée du centre même jusqu'à la circonférence, elle prend le nom de *rayon*, comme nous avons dit.

102. Dans le troisiéme cas, c'est-à-dire, lorsque la ligne droite est tirée d'un point de la circonférence, & qu'elle est aussi terminée par la circonférence, on la nomme *corde* ; & si la corde passe par le centre, elle prend le nom de *diamètre* : c'est ce que nous avons déja dit.

Il est à propos d'observer ici que tout arc est concave d'un côté ; sçavoir vers le centre, & convexe de l'autre : c'est pourquoi si on prend un point hors du cercle, il

eſt viſible que la partie de circonférence la plus proche de ce point eſt convexe à ſon égard, & que la plus éloignée eſt concave : par exemple, dans la Figure 37 l'arc FH eſt convexe par rapport au point A, & l'arc BE eſt concave.

THEOREME I.

103. *Une ligne qui coupe une corde peut avoir trois conditions* : 1°. *Paſſer par le centre* : 2°. *Couper la corde en deux parties égales* : 3°. *Etre perpendiculaire à la corde. Or deux de ces conditions étant poſées, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement.*

DEMONSTRATION.

I. CAS. Si une ligne, comme EF, paſſe par le centre, & qu'elle coupe la corde AB en deux parties égales, elle eſt perpendiculaire à cette corde : car ſi elle paſſe par le centre, ſon point C, qui eſt le centre même, eſt également éloigné des deux points de la circonférence A & B, qui ſont les extrêmitez de la corde : d'ailleurs puiſque par l'hypotheſe la ligne EF coupe la corde en deux parties égales, le point d'interſection D eſt encore également diſtant des deux extrêmitez A & B ; il y a donc deux points dans la ligne EF également diſtans des deux extrêmitez de la corde ; & par conſéquent cette ligne eſt perpendiculaire à la corde. (70.) Fig. 36.

II. CAS. Si la ligne EF paſſe par le centre, & qu'elle ſoit perpendiculaire à la corde, elle coupe la corde en deux parties égales : car puiſque la ligne EF paſſe par le centre, ſon point C eſt également éloigné des deux points A & B de la circonférence ; ainſi cette ligne étant ſuppoſée perpendiculaire, tous ſes autres points doivent être également éloignez des deux mêmes points ; (68.) par conſéquent ſon point d'interſection D eſt auſſi également éloigné des deux extrémitez A

& B de la corde, c'est-à-dire, que la corde est coupée en deux parties égales.

III. CAS. Enfin si la ligne EF coupe la corde en deux parties égales, & qu'elle soit perpendiculaire à la corde, elle passe par le centre : car la ligne EF coupant la corde en deux parties égales, le point d'intersection D est également distant des deux extrêmitez A & B de la corde : mais d'ailleurs cette ligne est supposée perpendiculaire à la corde ; donc étant prolongée, elle passe par tous les points du même plan également distans de A & de B. (69.) Or le centre est également éloigné des deux points A & B qui sont dans la circonférence; par conséquent la perpendiculaire EF passe par le centre. Ce qu'il fal. dém.

104. Remarquez que dans ces trois cas, la ligne EF coupe le grand arc AEB & le petit arc AFB chacun par le milieu : car dans tous ces cas la ligne EF a deux points; sçavoir, C & D également éloignez des deux points A & B; ainsi tous ses autres points sont aussi également distans des deux mêmes points A & B; par conséquent le point E est également distant de A & de B; les cordes EA & EB sont donc égales; ainsi les arcs EA & EB qu'elles soûtiennent sont aussi égaux; donc le grand arc AEB est coupé par le milieu : pareillement le point F est également distant de A & de B; par conséquent le petit arc AFB est aussi coupé par le milieu.

COROLLAIRE.

105. Il suit de ce Theorême & de la remarque, que tout rayon, comme CF, perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & son arc, chacun en deux parties égales. Il suit aussi que le rayon qui coupe la corde en deux parties égales est perpendiculaire à cette corde.

THEOREME II.

Fig. 37. 38&39. 106. *Si on tire d'un même point* A *plusieurs lignes, comme* AB, AD, AE, *terminées à la circonférence, la*

plus longue est celle qui passe par le centre; & la plus courte est celle qui est terminée à un point plus éloigné de B extrémité de la ligne qui passe par le centre.

Le point A peut être ou hors du cercle, (Fig. 37.) ou dans la circonférence (Fig. 38.) ou au-dedans du cercle (Fig. 39.) Il faut prouver dans ces trois cas que la ligne AB qui passe par le centre est la plus longue de toutes, & que la ligne AE est la plus courte. Pour cela il faut tirer des rayons au point D & au point E: une seule démonstration suffira pour les trois Figures.

AVERTISSEMENT. Lorsqu'une démonstration s'applique à plusieurs Figures, il est bon, en la lisant, de n'en regarder d'abord qu'une : & après avoir bien conçû la démonstration, on l'applique ensuite aux autres Figures : ainsi en lisant la démonstration suivante, il est à propos de ne regarder d'abord que la Figure 37.

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. Il faut prouver que la ligne AB est la plus longue. La ligne ACD est plus longue que AD, (5.) qui est une ligne droite tirée entre les deux points A & D. Or la ligne AB qui passe par le centre est égale à la ligne ACD, parce qu'elles ont la partie commune AC, & des restes égaux; sçavoir, les rayons CB & CD; donc AB est plus longue que AD. On peut prouver pareillement que AB est plus longue que AE; par conséquent la ligne AB est la plus longue de toutes les lignes tirées du point A à la circonférence.

II. PARTIE. Il faut faire voir que la ligne AE est la plus courte, ou ce qui est la même chose, que les autres lignes, comme AD, sont plus longues que AE. La ligne CGD est plus longue que le rayon CD; (5.) donc elle est aussi plus longue que l'autre rayon CE; par conséquent si on ôte CG, qui est une partie commune à la ligne CGD & au rayon CE, le reste GD sera

plus grand que GE : donc si à ces deux restes on ajoûte AG, la toute AGD sera plus grande que l'autre toute AGE. Or cette derniere ligne AGE est plus longue que la droite AE ; (5.) par conséquent la ligne AGD est aussi plus longue que AE. Ce qu'il falloit démontrer.

107. Remarquez que quand le point A est hors du cercle, le théorême est toûjours vrai, quoique les lignes AD & AE soient terminées à la partie convexe de la circonférence, comme dans la Figure 40 ; ainsi AE est plus courte que AD, parce que la premiere est terminée à un point plus éloigné de B que la seconde : afin de le prouver, il faut tirer les deux rayons CD & CE, & prolonger la ligne AE jusqu'au point G, où elle rencontre le rayon CD. Cela posé, je raisonne ainsi : La ligne ADG est plus longue que la droite AG ; (5.) donc en ajoûtant CG de part & d'autre, la toute ADC sera plus longue que la toute AGC. Pareillement la ligne CGE est plus longue que la droite CE ; (5.) donc en ajoûtant AE de part & d'autre, la toute AGC sera plus longue que la toute AEC. J'ai donc prouvé que ADC est plus longue que AGC ; & que AGC est plus longue que AEC ; par conséquent ADC est plus grande que AEC ; donc si on retranche les rayons CD & CE, le reste AD sera plus grand que le reste AE.

Fig. 40.

COROLLAIRE I.

108. Dans la Fig. 38, la ligne AB est un diamêtre, & les lignes AD & AE sont des cordes. Il suit donc de ce Théorême que le diamêtre est plus grand qu'aucune des cordes. De plus il est évident que la corde AD soutient un plus grand arc que la corde AE. Il suit donc aussi que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soûtiennent de plus grands arcs : réciproquement l'arc AED étant plus grand que l'arc AE, il faut que la corde AD soit plus grande que la corde AE, puisque le premier de ces

arcs étant plus grand que le second, le point D est plus proche du point B que le point E : par conséquent dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les plus grands arcs sont soutenus par des cordes plus grandes.

COROLLAIRE II.

109. Les lignes tirées du point A à la circonférence sont des sécantes extérieures dans la Figure 37 ; & ce sont des sécantes intérieures dans la Fig. 39. Il suit donc de ce Théorême que de toutes les sécantes extérieures tirées du même point, la plus longue est celle qui passe par le centre ; & pareillement que de toutes les sécantes intérieures tirées du même point, la plus longue est aussi celle qui passe par le centre.

THEOREME III.

110. *De toutes les sécantes extérieures tirées du même point à la circonférence, celle qui prolongée passeroit par le centre, est la plus courte. Pareillement de toutes les sécantes intérieures tirées du même point à la circonférence, celle qui prolongée passeroit par le centre, est la plus courte.*

Ce Théorême auroit pû être déduit du précédent comme un Corollaire. En voici une démonstration particuliere.

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. Il faut prouver que des deux sécantes extérieures AF & AE, la premiere, qui est celle qui passeroit par le centre, est la plus courte. Que l'on prolonge la sécante AF jusqu'au centre C ; & qu'on tire de ce centre le rayon CE, on aura la ligne droite AFC plus courte que la ligne AEC ; (5.) donc en retranchant de l'une & de l'autre des parties égales, sçavoir, les rayons CF & CE, les restes seront encore inégaux. Or le reste de la premiere est la secante AF, & le reste de la seconde est AE ; donc la sécante AF est plus courte que l'autre. Fig. 41.

Fig. 42. II. PARTIE. Les sécantes intérieures AF & AE sont tirées du même point : je dis que la secante AF, qui prolongée passeroit par le centre C, est plus courte que la sécante AE : car si on prolonge AF jusqu'au centre C, & qu'on tire le rayon CE, on aura les deux rayons CF & CE égaux. Or CE, qui est une ligne droite tirée du point C au point E, est plus courte que CAE; donc l'autre rayon CF est aussi plus court que CAE; donc si on retranche CA, qui est une partie commune au rayon CF & à la ligne CAE, le reste AF sera plus court que le reste AE. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IV.

111. *Une ligne perpendiculaire à l'extrêmité d'un rayon ne touche la circonférence que dans un seul point.*

DEMONSTRATION.

Fig. 43. Soit la ligne ABD perpendiculaire à l'extrêmité du rayon; je dis qu'elle ne touche le cercle qu'au seul point B : car si on tire les deux lignes CE & CF, elles seront obliques sur la ligne ABD, (71.) parce qu'elles sont tirées du même point que le rayon perpendiculaire CB : donc ces obliques seront plus longues que le rayon perpendiculaire; par conséquent elles ont leurs extrêmitez E & F au-delà du cercle & de la circonférence : donc ces points E & F ne touchent pas la circonférence. On peut dire la même chose de tout autre point distingué de B, & par conséquent la ligne ABD ne touche le cercle qu'au seul point B.

COROLLAIRE.

112. Toute ligne perpendiculaire à l'extrêmité du rayon est donc une tangente, puisque ne touchant le cercle que dans un seul point, elle ne peut couper la circonférence.

THEOREME V.

113. *La tangente est perpendiculaire au rayon qui est tiré au point de contingence.* Ce Théorême est la proposition inverse ou réciproque du Corollaire précédent.

DEMONSTRATION.

Soit la tangente ABD qui touche le cercle au point B auquel on a tiré le rayon CB : il faut démontrer que la tangente est perpendiculaire au rayon.

Puisque la tangente ne coupe pas la circonférence, elle n'entre pas dans le cercle, & par conséquent il est impossible de tirer du centre à la tangente une ligne plus courte que le rayon CB : donc ce rayon est perpendiculaire à la tangente ; (73.) & réciproquement la tangente est perpendiculaire au rayon.

COROLLAIRE I.

114. La tengente ne touche le cercle qu'en un seul point : car le rayon CB étant perpendiculaire, toute autre ligne tirée du centre C sur la tangente est oblique, & par conséquent plus longue que ce rayon : ainsi elle aura son extrêmité hors de la circonférence : donc le point de la tangente auquel elle aboutira, ne touchera pas la circonférence. On peut démontrer la même chose de tout autre point différent du point B : donc la tangente ne touche la circonférence qu'en ce point.

COROLLAIRE II.

115. De ces trois conditions, sçavoir, passer par le centre, aboutir au point de contingence, être perpendiculaire à la tangente, deux étant posées, la troisiéme s'ensuit nécessairement. 1°. Il paroît par la démonstration du Théorême, que tout rayon tiré au point de contingence, ou, ce qui revient au même, toute ligne qui passe par le centre, & qui aboutit au point de contingence, est perpendiculaire à la tangente.

2°. Il suit de là que si une ligne passe par le centre, & qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut qu'elle aboutisse au point de contingence : car cette seconde ligne ne peut être différente de la premiere : autrement on pourroit tirer du centre deux perpendiculaires sur la tangente. 3°. Il suit aussi que si une ligne aboutit au point de contingence, & qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut qu'elle passe par le centre : car cette troisiéme ligne ne peut être différente de la premiere ou de la seconde ; autrement on pourroit tirer du point de contingence deux perpendiculaires sur la tangente.

COROLLAIRE III.

116. On ne peut mener qu'une tangente au même point de la circonférence : car toute tangente est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon tiré au point de contingence. Or il ne peut y avoir qu'une perpendiculaire sur l'extrêmité (71.) d'une ligne : par conséquent il est impossible de mener deux tangentes au même point de la circonférence.

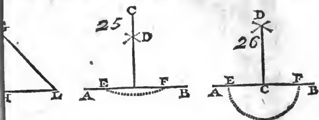
THEOREME VI.

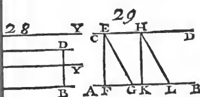
117. *On ne peut tirer au point de contingence aucune ligne droite qui passe entre la circonférence & la tangente : mais on y peut faire passer une infinité de lignes circulaires.*

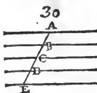
DEMONSTRATION.

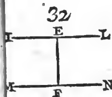
Fig. 43. I. PARTIE. Que l'on tire la ligne droite GB au point de contingence : il faut démontrer qu'elle ne peut passer entre la circonférence & la tangente ABD.

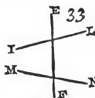
Cette tangente étant perpendiculaire à l'extrêmité du rayon CB, il est nécessaire que la ligne GB soit oblique (71.) au même rayon : par conséquent ce rayon est aussi oblique sur la ligne GB : donc si du centre C on tire la perpendiculaire CH sur cette ligne, elle sera plus courte que le rayon CB qui est oblique : donc son extrêmité H

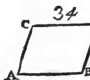


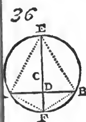


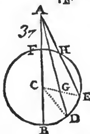


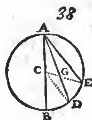




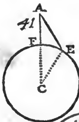


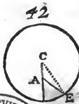


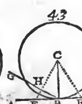













BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

ſera au-dedans du cercle : donc la ligne GHB coupe le cercle, & ainſi elle ne paſſe pas entre la circonférence & la tangente.

On peut concevoir que la ligne GB s'approche de la tangente, en faiſant deſcendre le point G : mais la même démonſtration ſubſiſtera toûjours juſqu'à ce que la ligne GB ſoit appliquée ſur la tangente, & qu'elle ne faſſe plus qu'une même ligne avec elle : ce qui fait voir que quand on tireroit au point de contingence une ligne droite qui ſeroit plus proche de la tangente, elle couperoit toûjours le cercle.

II. PARTIE. On peut faire paſſer une infinité de lignes circulaires par le point de contingence, entre la tangente ABD & la petite circonférence dont le rayon eſt CB : car ſoit prolongé le rayon CB juſqu'au point G, & que de ce point, comme centre, & de l'intervalle GB on décrive la grande circonférence ; il faut démontrer qu'elle paſſe entre la tangente & la petite circonférence, en ſorte qu'elle ne coupe ni la tangente, ni la petite circonférence. Fig. 44.

1°. La grande circonférence ne coupe pas la tangente du petit cercle ; car ſon rayon GB eſt terminé au même point B que le rayon du petit cercle : ainſi la ligne ABD n'eſt pas coupée par la grande circonférence ; mais elle eſt tangente par rapport au grand & au petit cercle.

2°. La grande circonférence ne coupe pas la petite : pour le faire voir, il n'y a qu'à démontrer que les deux circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point B. Or il eſt aiſé de montrer que tout autre point de la grande circonférence différe du point B, par exemple le point F n'eſt pas commun à la petite : car ſoit tirée la ligne CF, cette ligne CF eſt ſécante intérieure par rapport au grand cercle, laquelle ne paſſeroit pas par le centre, & la ligne CB eſt auſſi une ſécante intérieure du même cercle, qui prolongée paſſeroit par le centre : donc la ligne

CF eſt plus longue que CB. (110.) Or les deux lignes CB & CE, qui ſont rayons du petit cercle ſont égales : par conſéquent CF étant plus longue que CB, elle eſt auſſi plus longue que CE : donc le point F n'eſt pas le même que le point E qui appartient à la petite circonférence. On démontrera la même choſe de tout autre point de la grande circonférence par rapport à tous ceux de la petite, excepté le point B : par conſéquent les deux circonférences n'ont d'autre point commun que le point B : donc la grande ne coupe pas la petite : d'ailleurs elle ne coupe pas la tangente ; elle paſſe donc par le point de contingence entre la petite circonférence & la tangente. Ce qu'il falloit démontrer.

Si on prolongeoit le rayon GB au-delà de G, on pourroit décrire de nouvelles circonférences qui paſſeroient toutes entre la tangente & la petite circonférence qui a pour rayon CB.

118. Il paroît d'abord ſurprenant que l'on puiſſe faire paſſer une ligne circulaire entre la tangente & une moindre circonférence, quoique l'on n'y puiſſe pas faire paſſer une ligne droite, puiſque celle-ci n'a pas plus de largeur que la ligne circulaire, ou plutôt on les regarde l'une & l'autre comme n'en ayant aucune : mais ce qui fait la différence entre l'une & l'autre ligne, c'eſt que la droite va toûjours ſelon la même direction ; & de là vient qu'elle ne peut parvenir juſqu'au point de contingence ſans couper la circonférence : au contraire la ligne circulaire ſe détourne, & renferme la moindre circonférence : c'eſt ce qui fait qu'elle arrive au point de contingence ſans la couper.

119. On peut encore remarquer ſur ce Théorême que l'eſpace compris entre la circonférence & la tangente à côté du point de contingence, peut être diviſé en une infinité de parties, puiſqu'on peut décrire une infinité de circonférences qui paſſeront toutes par différens points de cet eſpace, & qui n'auront d'autre point

commun que le point de contingence, comme on vient de le démontrer : d'où il faut conclurre que la matiere est divisile à l'infini, & qu'elle n'est pas composée de points inétendus.

Nous donnerons les Problêmes sur les tangentes après avoir parlé de la mesure des angles, d'où dépend la méthode dont nous nous servirons pour tirer une tangente d'un point donné hors de la circonférence du cercle.

DE LA MESURE DES ANGLES, qui n'ont pas leur sommet au centre du Cercle.

Nous avons dit qu'un angle dont le sommet est au centre, a pour mesure l'arc compris entre ses côtez : mais il y a des angles dont le sommet est à la circonférence ; il y en a d'autres qui ont leur sommet hors du cercle : enfin, il y en a dont le sommet est dans le cercle, entre le centre & la circonférence.

120. Ceux qui ont leur sommet à la circonférence & qui sont formez par des cordes, sont appellez *angles inscrits* : tel est l'angle BAD, Fig. 47 : ceux qui ont aussi leur sommet à la circonférence, & qui sont formez par une corde & par une tangente, comme BAD & GAD, sont appellez *angles du segment.* Fig. 52.

121. On entend par *segment* la partie du cercle terminée par une corde & par l'arc soûtenu par cette corde : tel est l'espace ADF contenu entre la corde AD & l'arc AFD. Or toute corde qui ne passe pas par le centre, divise le cercle en deux segmens inégaux, dont l'un est nommé *le petit segment*, comme ADF, & l'autre *le grand segment*, comme ADE ; c'est pour cela que l'angle BAD est appellé *l'angle du petit segment* ; & l'autre GAD, qui est supplément du premier, est appellé *l'angle du grand segment.*

L'angle qu'on nomme inscrit, comme BAD Figure 47, est aussi appellé *angle dans le segment*, parce que si on conçoit une corde BD qui joigne les extrêmitez

des deux côtez de l'angle inscrit, elle partagera le cercle en deux segmens, dans l'un desquels est renfermé l'angle inscrit.

Nous déterminerons dans cet abregé la mesure de ces angles, sans parler de celle des autres qui ont leur sommet en dehors ou en dedans de la circonférence. Mais avant il faut établir la vérité du Lemme suivant, dont nous nous servirons dans la démonstration des propositions sur cette matiere.

LEMME.

123. *Lorsque deux paralleles coupent ou touchent une circonférence, les arcs compris de part & d'autre sont égaux..*

Il peut arriver trois cas. 1°. Que les deux paralleles coupent la circonférence. 2°. Qu'une des paralleles coupe la circonférence, & que l'autre la touche. 3°. Que les deux paralleles touchent la circonférence sans la couper. Or dans ces trois cas les arcs compris de part & d'autre entre les deux paralleles sont égaux.

DEMONSTRATION.

Fig. 45. 1°. Si les deux paralleles, comme GH & IK, coupent le cercle, les arcs GI & HK sont égaux: car tirant la ligne EF qui passe par le centre O, & qui soit perpendiculaire aux deux cordes paralleles, le grand arc IEK est coupé en deux parties égales EI & EK. (104.) Par la même raison l'arc GEH est coupé en deux parties égales EG & EH; par conséquent si on ôte ces deux dernieres parties des deux premieres, sçavoir, EG de EI, & EH de EK, les restes GI & HK seront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

2°. Si une des paralleles, comme CD, touche le cercle, & que l'autre, IK, le coupe, les deux arcs FI & FK compris entre ces paralleles sont égaux: car si la ligne EF passe par le centre, & qu'elle soit tirée au

au point de contingence F, elle sera nécessairement (115.) perpendiculaire à la tangente : par conséquent cette ligne EF sera aussi perpendiculaire à l'autre parallele IK (92.) ; donc cette parallele IK étant une corde, l'arc IFK qu'elle soûtient est coupé (104.) en deux parties égales, qui sont les arcs FI & FK compris entre les paralleles.

3°. Si les deux paralleles, comme AB & CD, touchent le cercle, les deux arcs EGIF & EHKF sont aussi égaux. Pour le démontrer, je tire la ligne EF qui passe par le centre, & qui aille aboutir au point de contingence F, elle sera perpendiculaire à la tangente CD (115.) ; par conséquent elle sera aussi perpendiculaire à l'autre tangente parallele AB. (92.) Or la ligne EF passant par le centre, & de plus étant perpendiculaire à la tangente AB, il faut qu'elle vienne aboutir au point de contingence E de cette tangente : (115.) ainsi la ligne EF qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre, aboutit de part & d'autre au point de contingence ; donc les deux arcs compris de part & d'autre entre les paralleles sont des demi-circonférences ; donc ces arcs sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME PREMIER ET FONDAMENTAL.

124. *L'angle qui a son sommet à la circonférence, & qui est formé par deux cordes, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtez.*

Ce Théorême a trois cas, parce qu'il peut arriver ou qu'un des côtez passe par le centre : tel est l'angle BAD Fig. 46, ou que le centre se trouve entre les deux côtez, comme dans la Fig. 47, ou enfin que le centre soit hors des deux côtez, comme dans la Fig. 48. Il faut faire voir que dans ces trois cas l'angle a pour mesure la moitié de l'arc BD sur lequel il est appuyé.

DEMONSTRATION.

Fig. 46. I. CAS. Si le côté AB de l'angle BAD passe par le centre C, tirez par ce centre la ligne EF parallele à l'autre côté AD; vous aurez les deux angles BCF & BAD égaux (90.) parce que les lignes EF & AD sont paralleles, & que ces deux angles sont du même côté de la sécante AB, le premier extérieur & l'autre intérieur. Or l'angle BCF ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc BF (42.) compris entre ses côtez: donc l'angle BAD, qui lui est égal, a aussi pour sa mesure le même arc BF. Il reste à faire voir que cet arc BF est la moitié de BFD; en voici la démonstration: l'arc BF est égal à l'arc AE, parce que ces deux arcs sont mesures d'angles égaux, (60.) sçavoir, BCF & ACE qui sont opposez au sommet. Pareillement l'arc DF est égal au même arc AE, puisqu'ils sont compris entre paralleles: donc les deux arcs BF & DF sont égaux; donc ils sont chacun la moitié de l'arc entier BFD. Or on vient de démontrer que l'arc BF est la mesure de l'angle BAD; ainsi cet angle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

Fig. 47. II. CAS. Si le centre est entre les deux côtez de l'angle BAD, il faut tirer une ligne du sommet A qui passe par le centre; elle divisera l'angle BAD en deux autres; sçavoir, BAF & FAD. Or le premier de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc BF, à cause de son côté AF qui passe par le centre: par la même raison l'autre angle FAD a pour mesure la moitié de l'arc FD; donc l'angle total BAD a pour mesure la moitié de BF & la moitié de FD; c'est-à-dire, la moitié de l'arc BD compris entre ses côtez.

Fig. 48. III. CAS. Si le centre est hors des deux côtez, il faut tirer du sommet une ligne telle que AF qui passe par le centre; cette ligne formera l'angle DAF qui a pour sa mesure la moitié de l'arc FD, ou, ce qui est

la même chose, la moitié de l'arc FB, plus la moitié de l'arc BD. Or l'angle FAB, qui est une partie de l'angle total DAF, a pour mesure la moitié de l'arc FB, à cause du côté AF qui passe par le centre; par conséquent l'angle BAD, qui est l'autre partie de l'angle total, a pour mesure la moitié de BD; autrement l'angle total DAF n'auroit pas pour mesure la moitié de FB plus la moitié de BD.

COROLLAIRE I.

125. Tous les angles inscrits, comme BAD, BED, BFD, appuyez sur le même arc BD sont égaux, parce qu'ils ont tous pour mesure la moitié de cet arc sur lequel ils sont appuyez. Fig. 49.

COROLLAIRE II.

126. Un angle, comme BCD, qui a son sommet au centre, & qui est appuyé sur le même arc que l'angle inscrit BAD, est le double de cet angle inscrit: cela paroît évidemment, parce que l'angle qui a son sommet au centre, a pour mesure l'arc entier BD sur lequel il est appuyé; au lieu que l'angle inscrit n'a pour mesure que la moitié du même arc. Fig. 50.

On ne doit pas être surpris si l'angle BCD est plus grand que l'angle BAD, quoiqu'ils soient tous les deux appuyez sur le même arc: car la grandeur d'un angle dépend de l'ouverture de ses côtez. (41.) Or il est visible que l'ouverture qui est entre les côtez du premier angle est plus grande que celle qui est entre les côtez du second.

COROLLAIRE III.

127. Un angle inscrit, comme BAD, qui est appuyé sur le diametre BD, est droit: car l'angle ne peut être appuyé sur le diametre BD, qu'il ne le soit aussi sur la demi-circonférence. Or tout angle inscrit, ap- Fig. 51.

puyé ſur la demi-circonférence, eſt droit, parce qu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence, ou le quart de la circonférence.

COROLLAIRE IV.

128. L'angle inſcrit BAE appuyé ſur un arc plus grand que la demi-circonférence, eſt obtus : & au contraire l'angle BAF appuyé ſur un arc moindre que la demi-circonférence, eſt aigu : cela eſt évident.

THEOREME II.

Fig. 52. 129. *Un angle du ſegment, comme* BAD, *a pour meſure la moitié de l'arc* AFD *ſoutenu par la corde* AD.

DEMONSTRATION.

Soit tirée la ligne DE parallele à la tangente GAB ; les deux angles alternes BAD & ADE ſont égaux. Or l'angle inſcrit ADE a pour meſure la moitié de l'arc AE (124.) ; donc l'angle BAD a auſſi pour meſure la moitié du même arc AE. Or les deux arcs AFD & AE ſont égaux (123.) à cauſe des paralleles GAB & DE : donc l'angle BAD a pour meſure la moitié de l'arc AFD.

L'angle du grand ſegment GAD, qui eſt ſupplément du premier, a auſſi pour meſure la moitié de l'arc AED, ſoûtenu de l'autre côté par la corde AD, car ces deux angles pris enſemble étant égaux à deux angles droits (54.) ils ont pour meſure la moitié de la circonférence. Or la meſure du premier angle BAD eſt la moitié de l'arc AFD : par conſéquent l'autre angle GAD a pour meſure la moitié du reſte de la circonférence, c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc AED.

THEOREME III.

Fig. 53. 130. *Un angle, comme* BAD, *formé par la corde* AD *& par le côté* AB, *qui eſt la partie de la corde* EA *prolon-*

gée hors du cercle, a pour mesure la moitié de la somme des arcs AD *&* AE *soutenus par les cordes.*

DEMONSTRATION.

L'angle inscrit EAD & l'angle BAD pris ensemble sont égaux à deux angles droits (54.); par conséquent ils ont pour mesure la moitié de la circonférence. Or l'angle inscrit EAD a pour mesure la moitié de l'arc ED (124.); donc son supplément BAD a pour mesure la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié de la somme des arcs AD & AE.

PROBLÊME I.

133. *D'un point donné comme* B, *dans la circonférence, tirer une tangente.*

Tirez un rayon au point B; ensuite élevez sur l'extrêmité de ce rayon la perpendiculaire AB, elle sera tangente au point B. (112.) Fig. 60.

PROBLÊME II.

134. *D'un point donné, comme* A, *hors de la circonférence, tirer une tangente.*

Tirez une ligne du point A au centre du cercle; coupez cette ligne par le milieu, que je suppose être le point O; après quoi du point O comme centre, & de l'intervalle OA décrivez une circonférence, elle coupera la premiere en deux points: si du point A on tire une ligne à un des points d'intersection, telle que la ligne AB, elle sera tangente au cercle donné.

La raison en est, que si on tire le rayon CB au point d'intersection, on aura l'angle ABC appuyé sur le diametre du cercle qu'on vient de décrire; par conséquent cet angle est droit: donc la ligne AB est perpendiculaire sur l'extrêmité du rayon; donc elle est tangente. (112.)

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

Il ne ſera peut être pas inutile de répéter quelque choſe de ce que nous avons dit dans le Traité des Raiſons & des Proportions, afin d'entendre plus facilement les propoſitions ſuivantes ſur les lignes Proportionnelles.

135. Une raiſon ou un rapport (il s'agit ici de la raiſon géometrique) eſt la maniere dont une grandeur en contient une autre: par exemple, la raiſon d'une ligne de 12 pieds à une ligne de quatre pieds eſt exprimée par 3, parce que la premiere ligne contient trois fois la ſeconde.

136. Il eſt évident que plus l'antécédent d'une raiſon eſt grand, le conſéquent demeurant le même, plus auſſi la raiſon eſt grande: par exemple, la raiſon d'une ligne de 12 pieds à une ligne de 4 pieds eſt plus grande que la raiſon d'une ligne de 8 pieds à la même ligne de 4 pieds, parce que 12 contient plus de fois 4, que 8 ne contient la même grandeur 4: au contraire l'antécédent demeurant le même, la raiſon eſt d'autant plus petite que le conſéquent eſt grand: par exemple, la raiſon de 15 à 5 eſt moindre que la raiſon de 15 à 3, parce que 15 contient moins de fois 5 qu'il ne contient 3.

137. La raiſon de deux grandeurs eſt égale à celle de leurs parties ſemblables, ou, ce qui revient au même, la raiſon des parties ſemblables eſt égale à celle des grandeurs entieres, par exemple, la raiſon de 25 à 20 eſt égale à celle de 100 à 80. C'eſt ce que nous avons établi dans le ſixiéme principe ſur les raiſons.

138. Lorſque deux raiſons ſont égales, elles forment une proportion: par exemple, la raiſon de 12 à 4 & celle de 15 à 5 forment une proportion, parce que ces deux raiſons ſont égales. Or nous avons dit qu'il y avoit trois cas où les raiſons ſont égales: le premier, quand chacun des antécédens contient ſon conſéquent éxactement ou ſans reſte, & le même nombre de fois, comme dans l'exemple qu'on vient de

rapporter : le second, quand chacun des antécédens contient l'aliquote pareille de son conséquent sans reste, & le même nombre de fois, par exemple, la raison de 18 à 24 est égale à celle de 9 à 12, parce que 18 contient autant de fois 6, que 9 contient 3. Or 6 & 3 sont des aliquotes pareilles des conséquens 24 & 12 : le troisiéme, quand chacun des antécédens contient l'aliquote pareille de son conséquent, & qu'il y a des restes des antécédens qui sont entr'eux comme les aliquotes pareilles : par exemple, la raison de 20 à 24 est égale à celle de 10 à 12, parce que 20 contient autant de fois 6, que 10 contient 3 ; & d'ailleurs les restes des antécédens, sçavoir, 2 & 1, sont entr'eux comme les aliquotes pareilles 6 & 3.

139. Lorsqu'on dit que plusieurs grandeurs, comme A, B, C, D, sont proportionnelles à autant d'autres, telles que a, b, c, d, cela signifie que les premieres sont les antécédens, & les autres les conséquens de raisons égales, en sorte que A. a : : B. b : : C. c : : D. d.

S'il n'y a que deux grandeurs de part & d'autre, comme A & B d'un côté, & a & b de l'autre, & qu'on dise que les deux premieres sont proportionnelles aux deux secondes, on entend que la raison des deux premieres est égale à celle des deux secondes, c'est-à-dire, que A. B : : a. b : ou que les deux premieres grandeurs sont les antécédens ; en sorte que A. a : : B. b. cette seconde proportion n'est que l'alterne de la premiere.

140. Il faut encore se souvenir que deux lignes sont réciproques à deux autres, lorsque les deux premieres sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyens.

141. Une ligne, comme BA, est dite divisée en moyenne & extrême raison, lorsque la ligne entiere BA est à la grande partie EA, comme cette grande partie EA est à la petite BE ; en sorte qu'on a la proportion BA. EA : : EA. BE. Fig. 74.

142. Une ligne eſt multipliée par une autre, lorſque l'on prend la premiere autant de fois qu'il y a de points dans l'autre : par exemple, pour multiplier AC par CD (Liv. 2, Fig. 20.) il faut prendre la ligne AC autant de fois qu'il y a de points dans la ligne CD ; c'eſt-à-dire, que pour avoir le produit de AC par CD, il faut concevoir qu'à chaque point de la ligne CD, on a élevé des lignes égales & paralleles à AC : ce qui rempliroit l'eſpace ACDB ; c'eſt pourquoi le produit d'une ligne par une autre, forme un rectangle ; & ſi ces deux lignes ſont égales, le rectangle eſt un quarré ; comme dans la Fig. 21. Liv. 2, où le côté AB eſt égal à la baſe BC. On donnera dans le ſecond Livre les définitions de rectangle & de quarré.

143. Remarquez que quand on conçoit qu'une ligne eſt multipliée par une autre, on ſuppoſe que la premiere eſt perpendiculaire à la ſeconde.

Fig. 61. 144. Il faut obſerver pour le Théorême ſuivant, que ſi deux lignes, comme EF & GH, compriſes dans un eſpace parallele ſont coupées par des paralleles, il eſt évident qu'une de ces lignes ſera diviſée en autant de parties que l'autre ; & ſi une des lignes eſt diviſée en parties égales entr'elles, l'autre ſera auſſi diviſée en autant de parties égales entr'elles : par exemple, ſi EF eſt diviſée en quatre parties égales qu'on peut nommer P, l'autre, ſçavoir GH, ſera pareillement coupée en quatre parties égales entr'elles, qu'on peut nommer S ; ainſi dans cette hypotheſe $EF = 4P$, & $GH = 4S$. De même les deux lignes AB & CD étant renfermées dans un eſpace parallele, ſi AB eſt coupée par des paralleles en trois parties égales, l'autre ligne CD ſera auſſi coupée en trois parties égales entr'elles.

THEOREME PREMIER ET FONDAMENTAL.

145. *Lorſque deux lignes compriſes dans un eſpace*

parallele, sont autant inclinées que deux autres lignes enfermées dans un autre espace parallele, les deux premieres sont proportionnelles aux deux autres.

Soient les deux lignes AB & CD autant inclinées dans leur espace parallele que les deux lignes EF & GH dans le leur; en sorte que AB & EF soient également inclinées, & que CD & GH soient aussi égalemem inclinées: il faut prouver que AB. EF : : CD. GH, ou *alternando*, AB. CD : : EF. GH.

DEMONSTRATION.

Si on prend sur EF la partie EI égale à AB, & qu'on tire la parallele IL, l'espace parallele compris entre EG & IL sera égal à celui qui est entre AC & BD : par conséquent on aura la partie GL égale à la ligne CD, puisque ces deux lignes sont également inclinées dans ces espaces. Or il est clair que EI & GL sont des parties semblables des lignes EF & GH, c'est-à-dire, que si EI est, par exemple, la moitié ou les trois quarts de la ligne EF, GL sera aussi la moitié ou les trois quarts de la ligne GH : car la ligne IL étant parallele aux deux autres EG & FH, il faut qu'elle divise semblablement EF & GH. Mais d'ailleurs les parties semblables sont proportionnelles aux grandeurs entieres. (137.) Par conséquent EI. GL : : EF. GH. Donc si à la place des parties EI & GL on prend les lignes AB & CD qui leur sont égales, on aura AB. CD : : EF. GH, ou *alternando*, AB. EF : : CD. GH; ce qu'il falloit démontrer.

Voici une autre démonstration, qui paroîtra peut-être plus rigoureuse, mais qui est aussi plus difficile.

AUTRE DEMONSTRATION.

Qu'on suppose la ligne EF divisée en parties égales; par exemple, en quatre, dont chacune soit nommée P : ensuite qu'on tire des paralleles par les points de division; elles couperont la ligne GH en autant de

parties égales entr'elles, (87.) quoiqu'inégales aux parties de la ligne EF : chacune des parties de GH soit nommée S ; ainsi de même que la ligne EF sera égale à quatre P ; la ligne GH sera aussi égale à quatre S.

Enfin qu'on prenne une des parties P du conséquent EF, & qu'on voye combien de fois elle est contenuë dans l'antécédent entier AB ; alors on connoîtra qu'elle y est contenuë exactement un certain nombre de fois sans reste, ou bien il y aura quelque reste.

Supposons 1°. qu'elle y est contenuë exactement, par exemple, trois fois sans reste ; alors en tirant des paralleles par les points de division de AB, la ligne CD sera pareillement divisée en parties égales entre elles, & aux parties de la ligne GH, puisque comme AB & EF sont également inclinées ; de même ces deux lignes CD & GH sont supposées également inclinées ; donc la ligne AB sera égale à 3P, & la ligne CD égale à 3S : ainsi au lieu des quatre lignes AB, EF, CD, GH, on aura 3P, 4P, 3S, 4S. Or il est évident que la proportion 3P. 4P : : 3S. 4S est vraie, puisque les aliquotes pareilles des conséquens, sçavoir P & S, sont contenuës trois fois chacune dans leur antécedent : ainsi dans ce premier cas, AB. EF : : CD. GH.

2°. Si P aliquote de EF, quelque petite qu'elle soit, n'est pas contenuë exactement dans l'antécedent AB ; & que par conséquent S aliquote pareille de GH, ne soit pas contenuë exactement dans l'antécédent CD ; il ne laisse pas d'y avoir proportion, comme dans le premier cas ; ensorte que la raison de AB à EF est égale à la raison de CD à GH : car si la premiere raison n'étoit pas égale à la seconde, elle seroit plus petite ou plus grande. Or l'un & l'autre est impossible.

Premierement, la raison de AB à EF n'est pas moindre que celle de CD à GH : car si elle étoit moindre, en ajoûtant quelque chose à l'antécédent AB (ce qui augmenteroit la raison, (136.) on pourroit la rendre

égale à celle de CD à GH. Or quelque petite partie qu'on ajoûte à l'antécédent AB, elle rendra la raison de AB à EF plus grande que celle de CD à GH. Pour le démontrer, soit nommée X la partie ajoûtée à l'antécédent AB, qui soit plus grande ou au moins égale à l'aliquote P : ce qui est toûjours possible, parce que l'on peut coucevoir que la ligne EF est divisée en autant de parties aliquotes que l'on voudra, & qu'ainsi chacune de ces aliquotes est aussi petite que l'on peut souhaiter. Cela posé, je démontre que la raison de AB+X à EF est plus grande que celle de CD à GH. Supposons que P soit contenuë 80 fois dans EF, & qu'ainsi l'aliquote pareille S soit contenuë 80 fois dans GH; il faudra que P soit aussi contenuë un certain nombre de fois dans AB, par exemple, 60 fois avec un petit reste moindre que P, & que S soit aussi contenuë 60 fois dans CD avec un petit reste moindre que S; mais comme on a ajoûté à la ligne AB la partie X plus grande ou au moins égale à P, cette aliquote P de EF sera contenuë au moins 61 fois dans l'antécédent AB+X; au lieu que l'aliquote pareille S de GH n'est pas contenuë 61 fois dans l'autre antécédent CD; ainsi la raison de AB+X à EF est plus grande que celle de CD à GH, on ne peut donc augmenter la premiere raison sans la rendre plus grande que la seconde; & par conséquent elle n'est pas moindre que la seconde.

Cette démonstration fait voir que l'on ne peut ajoûter à l'antécédent AB une partie plus grande que l'aliquote contenuë 80 fois dans EF, ou même égale à cette aliquote. Or il est évident qu'on prouvera de même que l'on ne peut ajoûter une partie qui soit la millième, la millioniéme, la cent-millioniéme de EF, & ainsi de suite à l'infini. Il est donc clair qu'on ne peut ajoûter une partie, si petite qu'elle soit, à l'antécédent AB, sans rendre la raison de AB à EF plus grande que celle de CD à GH.

On démontrera de la même maniere qu'on ne peut ôter aucune partie de AB, ſans rendre la raiſon de AB à EF moindre que celle de CD à GH ; donc la premiere raiſon n'eſt pas plus grande que la ſeconde : d'ailleurs elle n'eſt pas moindre, comme on vient de le prouver ; par conſéquent elle lui eſt égale : ainſi on a la proportion comme dans le premier cas, AB. EF :: CD. GH, ou *alternando*, AB. CD :: EF. GH. Ce qu'il falloit dém.

Remarquez que cette démonſtration a lieu, ſoit que les lignes AB & EF ſoient perpendiculaires dans leurs eſpaces, ou qu'elles ſoient obliques, pourvû qu'elles le ſoient également.

COROLLAIRE I.

146. Il ſuit de ce Théorême que le produit des lignes AB & GH eſt égal au produit des deux autres EF & CD, parce que les deux premieres ſont les extrêmes, & les autres ſont les moyens d'une proportion. Ce n'eſt qu'une application du Théorême fondamental de l'égalité du produit des extrêmes au produit des moyens, qui a toûjours lieu toutes les fois que quatre lignes ſont proportionnelles. Il ſuffira d'en avoir averti ici, ſans qu'il ſoit néceſſaire de le répéter ailleurs.

COROLLAIRE II.

Fig. 61. 147. Si deux lignes, comme AB & CD, compriſes entre deux lignes paralleles, ſont coupées toutes deux par une troiſiéme parallele EF, elles ſeront diviſées en parties proportionnelles ; c'eſt-à-dire, que AE. EB :: CF. FD. Car l'eſpace parallele total eſt diviſé en deux autres par la ligne EF. Or la ligne AE eſt autant inclinée dans l'eſpace ſupérieur, que la ligne EB l'eſt dans l'inférieur, parce que c'eſt la même ligne prolongée. Par la même raiſon les deux parties CF & FD ſont auſſi également inclinées chacune dans leur eſpace ; par conſéquent, ſelon le Théorême précédent, AE. EB :: CF. FD, ou *alternando*, AE. CF :: EB. FD.

148. On pourroit aussi dire que les deux lignes entieres AB & CD sont proportionnelles aux parties supérieures AE & CF, & aux parties inférieures EB & FD. Cela suit évidemment du Théorême, puisque les deux lignes entieres AB & CD sont autant inclinées dans leur espace que les deux parties, soit supérieures, soit inférieures, le sont dans le leur. On a donc les proportions AB. AE : : CD. CF, & AB. EB : : CD. FD, ou bien leurs alternes.

Afin de ne se pas tromper dans les proportions que l'on déduit dans ce Théorême & ses Corollaires, ou dans d'autres propositions qui en dépendent, il faut toûjours comparer deux lignes également inclinées, l'une avec l'autre ; en sorte que l'une soit l'antécedent, & l'autre le conséquent de la premiere raison, & que deux autres lignes qui sont aussi également inclinées soient l'antécédent & le conséquent de la seconde raison : par exemple, dans ce second Corollaire on a pris AE & EB pour les deux termes de la premiere raison, parce que la premiere de ces deux lignes est autant inclinée que l'autre : ensuite on a pris CF & FD pour les deux termes de la seconde raison, parce que ces deux lignes sont aussi également inclinées : on peut cependant prendre les proportions alternes.

Lorsque l'on choisit pour les deux termes d'une raison des lignes également inclinées, il faut encore prendre garde que l'antécédent de la seconde raison soit tiré du même espace parallele que celui de la premiere : ainsi on ne pourroit pas dire que dans la Figure 62, AE. EB : : FD. CF, parce que FD n'est pas dans le même espace parallele que le premier antécédent AE. Il faut pareillement que les deux conséquens soient dans le même espace.

COROLLAIRE III.

149. Si deux lignes, telles que FD & EB, comprises dans un espace parallele, se coupent, les par- Fig. 64.

ties de l'une feront proportionnelles aux parties de l'autre; en forte qu'on aura la proportion AF. AD : : AE. AB. Car ayant tiré la ligne A parallele aux deux autres FE & BD, on aura deux efpaces paralleles, l'un fupérieur, & l'autre inférieur. Or la ligne AF eft autant inclinée dans fon efpace, que AD dans le fien, puifque ce font les deux parties d'une même ligne. Par la même raifon les deux lignes AE & AB font auffi également inclinées dans les mêmes efpaces. Par conféquent les deux premieres lignes AF & AD font proportionnelles aux deux autres AE & AB.

150. On peut dire auffi que les deux lignes entieres FD & EB font proportionnelles aux parties fupérieures AF & AE, & aux parties inférieures AD & AB Cela vient de ce que chaque ligne entiere eft autant inclinée dans l'efpace total, que fa partie, foit fupérieure, foit inférieure, l'eft dans le fien.

COROLLAIRE IV.

Fig. 63. 151. Si les deux côtez d'un angle, comme BAD, font coupez par une ligne, telle que EF parallele à la bafe, c'eft-à-dire, à la ligne BD tirée d'un côté à l'autre, les deux parties d'un côté font proportionnelles aux parties de l'autre; en forte que AE. EB : : AF. FD : car ayant mené par le point A une parallele à la bafe BD, il eft clair que les deux lignes AE & AF font autant inclinées dans leur efpace, que EB & FD le font dans le leur : d'où s'enfuit la proportion, AE. EB : : AF. FD, ou *alternando*, AE. AF : : EB. FD.

152. On peut auffi, comme dans le fecond Corollaire, faire voir que les deux côtez AB & AD font proportionnels aux parties AE & AF, & aux parties EB & FD; en forte qu'on a les proportions, AB. AE : : AD. AF, & AB. EB : : AD. FD, & leurs alternes.

COROLLAIRE V.

Fig. 65. 153. Si deux lignes, comme AB & AC, tirées du

même point A, ſont autant inclinées ſur la baſe BC, que deux autres lignes DE & DF tirées du point D le ſont ſur la baſe EF, les deux premieres ſeront proportionnelles aux deux autres; en ſorte qu'on aura la proportion, AB. DE : : AC. DF. Car ſi on conçoit par les points A & D des lignes tirées parallelement aux baſes, on aura deux eſpaces paralleles; & les deux lignes AB & AC ſeront autant inclinées dans le premier eſpace, que les deux lignes DE & DF le ſont dans le ſecond; & par conſéquent ces quatre lignes ſeront proportionnelles. C'eſt par ce Corollaire qu'on démontrera dans la ſuite que quand les angles d'un triangle ſont égaux aux angles d'un autre, les côtez du premier triangle ſont proportionnels aux côtez du ſecond. C'eſt un des plus beaux Théorêmes de toute la Géométrie.

COROLLAIRE VI.

154. Si un angle, comme BAC, a deux baſes paralleles BC, EF, elles ſeront proportionnelles au côté entier AB & à la partie AE; en ſorte qu'on aura la proportion, BC. EF : : AB. AE. Pour le démontrer, il n'y a qu'à concevoir des lignes tirées par le point B & par le point E, qui ſoient paralleles au côté AC; ces lignes formeront deux eſpeces paralleles, un grand & un petit: le grand compris entre AC & la ligne ponctuée B, renferme les lignes AB & BC; & le petit compris entre AC & la ligne ponctuée E, renferme les lignes AE & EF. Or la baſe BC eſt autant inclinée dans le grand eſpace que EF dans le petit, puiſque ces deux baſes ſont paralleles: de même AB eſt autant inclinée dans le premier eſpace que AE dans le ſecond, parce que c'eſt la même ligne prolongée, d'où ſuit la proportion, BC. EF : : AB. AE, ou bien, en commençant par le côté AB & la partie AE, AB. AE : : BC. EF, & *invertendo*, AE. AB : : EF. BC. Fig. 66.

155. On démontreroit de la même maniere que les

bafes font proportionnelles au côté AC & à fa partie AF, en concevant des paralleles au côté AB tirées par le point C & par le point F.

Fig. 67. 156. On trouve les mêmes proportions dans la Fig. 67, qui n'eft différente de la préeédente, qu'en ce que les deux bafes paralleles ne font pas du même côté du point A, l'une étant au-deffus & l'autre au-deffous de ce point.

COROLLAIRE VII.

Fig. 68. 157. Si un angle, comme BAD, a deux bafes paralleles BD & EG, & que du fommet de l'angle on tire une ligne qui coupe les deux bafes; les parties de l'une feront proportionnelles aux parties de l'autre; c'eft-à-dire, qu'on aura la proportion BC. EF :: CD. FG. Car par le Corollaire préeédent, BC. EF :: AC. AF, & de même, CD. FG :: AC. AF. Voilà donc deux raifons, fçavoir, celle de BC à EF, & celle de CD à FG, qui font égales chacune à la raifon de AC à AF; donc ces deux raifons font égales entr'elles: ce qui fait la proportion, BC. EF :: CD. FG, & *alternando*, BC. CD :: EF. FG: d'où il fuit que fi une bafe eft coupée en parties égales, l'autre l'eft pareillement.

Fig. 69. 158. Ce que nous avons dit fur la Fig. 68 peut être appliqué à la Fig. 69, qui ne differe de la précédente qu'en ce que les deux bafes paralleles ne font pas du même côté du point A.

159. Si du fommet de l'angle qui a deux bafes paralleles, on tiroit plufieurs lignes qui coupaffent les bafes, toutes les parties de l'une feroient proportionnelles aux parties correfpondantes de l'autre: par exemple, dans la Fig. 77 CE eft à ag, comme EF eft à gh, & comme FD eft à hb.

160. Remarquez que fi deux angles qui font fur une bafe font égaux à deux angles qui font fur une autre bafe chacun à chacun, les côtez de la premiere bafe feront autant inclinez fur elle que les deux autres côtez

Digitized by Google

Digitized by Google

tez le ſont ſur la ſeconde baſe : par exemple, dans la Figure 65, ſi les angles B & C formez ſur la baſe BC ſont égaux aux deux angles E & F formez ſur la baſe EF, chacun à chacun ; c'eſt à-dire, l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C égal à l'angle F, pour lors les côtez AB & AC ſeront autant inclinez ſur la baſe BC, que les lignes DE & DF le ſont ſur la baſe EF. Cela vient de ce que la grandeur des angles dépend de l'inclinaiſon des lignes. Cette remarque ſera d'uſage dans la ſuite. Fig. 65.

COROLLAIRE VIII.

161. Si un angle, comme BAD, eſt diviſé en deux parties égales par la ligne AC, elle coupera la baſe BD en deux parties proportionnelles aux côtez de l'angle ; enſorte qu'on aura la proportion BC. DC :: BA. DA : car ſi on conçoit des lignes tirées par le point B & par le point D paralleles à la ligne AC, on aura deux eſpaces paralleles, dans un deſquels ſont renfermées les lignes BC & BA, & dans l'autre DC & DA. Or la ligne BC eſt autant inclinée dans ſon eſpace, que la ligne DC dans le ſien, puiſque c'eſt la même ligne continuée : pareillement la ligne BA eſt autant inclinée dans le premier eſpace, que la ligne DA dans le ſecond, parce que l'angle BAC eſt égal par l'hypotheſe à l'angle DAC, on aura donc par le Théorême fondamental la proportion BC. DC :: BA. DA, ou en commençant la proportion par les côtez, BA. DA :: BC. DC. Fig. 70.

162. Remarquez que ſi les deux côtez BA, DA de l'angle BAD ſont égaux, les deux parties de la baſe coupée par la ligne AC ſont égales. Cela ſuit de la proportion, BA. DA :: BC. DC, qu'on vient de prouver dans ce Corollaire. En général lorſque les deux premiers termes d'une proportion ſont égaux, les deux derniers ſont auſſi égaux entr'eux. Pareillement ſi les deux antécédens ſont égaux, les conſéquens ſont égaux

entr'eux ; réciproquement si les deux conséquens sont égaux, les antécédens le sont aussi : car sans cela le premier terme ne seroit pas au second, comme le troisiéme est au quatriéme ; ainsi il n'y auroit pas de proportion. On peut appliquer cette remarque au second, troisiéme, quatriéme, cinquiéme, sixiéme & septiéme Corollaire.

THEOREME II.

163. *Lorsque deux cordes d'un cercle se coupent, les parties de l'une sont réciproques aux parties de l'autre.*

Fig. 71. Soient les deux cordes AF & DE qui se coupent au point B ; les deux parties BA & BF de la premiere sont réciproques aux parties BE & BD de la seconde ; c'est-à-dire, que BA. BE : : BD. BF.

DÉMONSTRATION.

Si l'on tire les deux lignes AD & EF, les angles DAF & DEF seront égaux, parce qu'ils sont appuyez sur le même arc DF : de même les angles ADE & AFE sont aussi égaux, étant appuyez sur le même arc AE ; ainsi en nommant les angles par une seule lettre, les deux angles A & D qui sont sur la base AD sont égaux aux deux autres E & F, qui sont sur la base EF chacun à chacun. Or la grandeur des angles dépend de l'inclinaison des lignes (160.) ; par conséquent les deux lignes BA & BD tirées du point B, sont autant inclinées sur la base AD, que les deux lignes BE & BF tirées du même point, le sont sur la base EF : on aura donc, suivant le cinquiéme Corollaire (153), la proportion, BA. BE : : BD. BF. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 72. 164. Si une des cordes, comme AF, étoit diametre, & qu'elle fût perpendiculaire à l'autre corde, la partie BE ou BD de cette seconde corde seroit moyenne pro-

portionnelle entre les parties BA & BF du diametre: car par le Théorême : BA. BE : : BD. BF. Or par l'hypothese la ligne AF passe par le centre, & de plus elle est perpendiculaire à la corde DE; par conséquent cette corde est coupée en deux parties égales, (103.) sçavoir, BE & BD; donc on peut mettre BE à la place de BD dans la proportion précédente, & on aura BA. BE : : BE. BF; ainsi lorsqu'un diametre est perpendiculaire à une corde, ou, ce qui revient au même, lorsqu'une corde est perpendiculaire au diametre, la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre.

COROLLAIRE II.

165. On peut conclurre de là, que si d'un point de la circonférence d'un cercle on tire une perpendiculaire, comme EB sur le diametre AF, elle sera moyenne proportionnelle entre les deux parties BA, BF du diametre: car cette perpendiculaire est la moitié d'une corde perpendiculaire au diametre; par conséquent elle est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. C'est une propriété remarquable du cercle.

THEORÊME III.

166. *Deux sécantes extérieures étant tirées du même point & prolongées jusqu'à la partie concave de la circonférence, une sécante entiere & sa partie hors du cercle sont réciproques à l'autre sécante entiere & à sa partie hors du cercle.*

Soient les sécantes extérieures BA & BD tirées du même point B, & prolongées jusqu'en A & D: il faut prouver que la sécante BA & sa partie extérieure BE sont réciproques à l'autre sécante BD & à sa partie extérieure BF; c'est-à-dire, que BA. BD : : BF. BE. On peut aussi exprimer cette proportion, en disant que les deux sécantes extérieures sont entr'elles récipro- Fig. 73.

quement comme leurs parties hors du cercle.

DEMONSTRATION.

Ayant mené les cordes AF & DE, les angles *p* & *o* ou AFD & AED ſont égaux, parce qu'ils ſont appuyez ſur le même arc AD; il faut donc que leurs ſupplémens *s* & *r* ou BFA & BED ſoient auſſi égaux. Pareillement les angles A & D ſont égaux, puiſqu'ils ſont appuyez ſur le même arc EF; ainſi les angles A & *s* formez ſur la baſe AF ſont égaux aux angles D & *r* formez ſur la baſe DE; donc les lignes BA & BF tirées du point B, ſont autant inclinées ſur la baſe AF, que les lignes BD & BE tirées du même point le ſont ſur la baſe DE (160.); donc par le cinquiéme Corollaire du premier Théorême, on aura la proportion, BA. BD : : BF. BE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 74. 167. Si une tangente, comme BD, & la ſécante BA ſont tirées du même point B, la tangente ſera moyenne proportionnelle entre la ſécante BA & ſa partie extérieure BE. Pour entendre la raiſon de ce Corollaire, il faut recourir à la Figure du Théorême, & concevoir que la ligne BA demeurant immobile, on en éloigne le côté BD en le faiſant tourner autour du point B : il eſt facile d'appercevoir que dans cette hypotheſe les points D & F s'approchent l'un de l'autre, la proportion du Théorême demeurant toûjours vraie. Or dans l'inſtant que la ligne BD devient tangente, le point D & le point F ſe confondent, & la ligne BF devient égale à BD; on a donc pour lors cette proportion BA. BD : : BF ou BD. BE.

Voici une ſeconde démonſtration plus géométrique & toute ſemblable à celle du Théorême.

Ayant tiré les cordes AF & DE, l'angle du grand ſegment BDA ou BFA a pour meſure la moitié de l'arc DEA ſoutenu par la corde AD (129). Or l'angle BED

a aussi pour sa mesure la moitié du même arc DEA (130.) ; ainsi les deux angles BFA & BED sont égaux entr'eux. Pareillement l'angle A & l'angle du petit segment BDE sont égaux, parce qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc DE ou FE ; ainsi, comme dans la démonstration du Théorême, les deux angles A & BFA formez sur la base AF sont égaux aux angles BED & BDE formez sur la base DE ; donc les lignes BA & BF ou BD sont autant inclinées sur la base AF, que les lignes BD & BE le sont sur la base DE ; par conséquent on aura la proportion, BA. BD : : BF ou BD. BE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

168. Si la partie intérieure EA de la sécante BA est égale à la tangente, cette sécante sera divisée en moyenne & extrême raison au point E : car par le Corollaire précédent on a la proportion, BA. BD : : BD. BE : donc mettant EA à la place de BD qui lui est supposée égale, la proportion sera BA. EA : : EA. BE : donc la sécante sera divisée en moyenne & extrême raison au point E.

COROLLAIRE III.

169. EA étant toûjours supposée égale à la tangente BD, si on prend BG égale à la partie BE de la sécante ; la tangente sera divisée en moyenne & extrême raison au point G : c'est-à-dire, qu'on aura la proportion BD. BG : : BG. GD : car puisque la partie intérieure EA de la sécante est égale à la tangente, on a déja BA. EA : : EA. BE. Donc *dividendo*, BA—EA. EA : : EA—BE. BE. Or BA—EA=BE : & par la construction BE=BG. Par conséquent on aura BG. EA : : EA—BG. BG. D'ailleurs par l'hypothese EA=BD. Donc BG. BD : : BD—BG. BG. Or BD—BG=GD. Ainsi la derniere proportion se réduit à celle-ci BG. BD : : GD. BG, ou bien *invertendo*, BD. BG : : BG. GD.

Si on veut retenir cette démonstration, il faut prendre garde qu'elle dépend du changement appellé *dividendo*, & de la substitution de certaines lignes à la place d'autres qui sont égales à celles que l'on substituë.

On peut aussi couper la tangente BD en moyenne & extrême raison d'une autre maniere, en tirant la ligne EH parallele à AD : car pour lors à cause des paralleles AD & EH le rapport de BH à HD sera égal (151.) à celui de BE à EA. Ainsi puisque la sécante BA est divisée en moyenne & extrême raison au point E, la tangente BD est pareillement divisée en moyenne & extrême raison au point H, en sorte que BD . HD :: HD . BH.

PROBLEME I.

Fig. 75. 170. *Trois lignes, comme* A, B, C, *étant données, trouver une quatriéme proportionnelle* D.

Tirez deux lignes indéfinies telles que EH & EK qui fassent tel angle qu'il vous plaira ; prenez sur une de ces lignes la partie EF égale à la ligne donnée A, & sur l'autre la partie EG égale à la seconde ligne B ; tirez la ligne FG : prenez ensuite sur la ligne EF prolongée tant qu'il sera besoin, la partie FH égale à la troisiéme ligne C qui est donnée, & tirez HK parallele à FG, la ligne GK renfermée entre les deux paralleles FG & HK sera la quatriéme proportionnelle cherchée ; car à cause des paralleles FG, HK, on a la proportion (151.) EF . EG :: FH . GK, ou bien A . B :: C . D.

PROBLEME II.

171. *Deux lignes, comme* A *&* B, *étant données, trouver une troisiéme proportionnelle que nous nommerons encore* D; *en sorte qu'on ait la proportion* A . B :: B . D.

Ce problême se résout de la même maniere que le premier, avec cette différence que la troisiéme ligne FH de la Figure 75, doit être égale à la seconde EG ;

& alors la ligne GK comprise entre les deux paralleles est la troisiéme proportionnelle cherchée.

PROBLEME III.

172. *Deux lignes, comme* A *&* C, *étant données, trouver une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes données.* Fig. 76.

Tirez une ligne indéfinie telle que DF, sur laquelle prenez DG égale à la ligne donnée A & la ligne GF égale à la ligne donnée C; divisez la somme DF en deux également au point O; & de ce même point comme centre, & de l'intervalle OD, décrivez un cercle: en suite du point G élevez la perpendiculaire GE jusqu'à la circonférence; elle sera la moyenne proportionnelle cherchée entre A & C.

C'est une suite évidente du second Corollaire (165) du Théorême second.

PROBLEME IV.

173. *Diviser une ligne donnée en des parties semblables ou proportionnelles à celles d'une autre ligne donnée.* Fig. 77.

Soit la ligne CD divisée en trois parties: sçavoir, CE, EF, FD; soit aussi donnée la ligne droite AB qu'il faut diviser en parties semblables à celles de CD. Tirez la ligne *ab* égale à AB & parallele à CD: ensuite par les extrêmitez de la ligne donnée CD, & celle de la parallele *ab*, tirez deux lignes, lesquelles iront se rencontrer dens un point comme K: enfin menez de ce point K des lignes droites au point de division de la ligne donnée CD; elles couperont la parallele égale à AB en parties proportionnelles ou semblables à celles de la ligne donnée CD.

Cette pratique a été démontrée dans le septiéme Corollaire (159.) du premier Théorême.

174. On peut par ce problême diviser une ligne don-

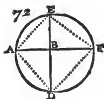
née en tant de parties égales qu'on voudra : ſuppoſons, par exemple, qu'on veuille diviſer la ligne AB en cinq parties égales, il faut tirer une ligne droite indéfinie,
Fig. 78. telle que MN, ſur laquelle vous prendrez avec le compas cinq parties égales de quelle grandeur vous voudrez, telles que MC, CD, DE, EF, FG; enſuite vous tirerez la ligne *ab* égale à AB qui ſoit parallele à la ligne indéfinie MN : & faites le reſte comme dans le Problême. Il eſt évident que la ligne *ab* ſera partagée en cinq parties égales.

PROBLEME. V.

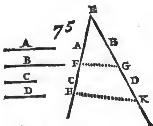
Fig. 79. 175. *Couper une ligne, comme* BD, *en moyenne & extrême raiſon.*

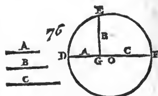
Sur une extrêmité de la ligne donnée BD, par exemple, ſur l'extrêmité D, élevez la perpendiculaire CD égale à la moitié de la ligne BD : enſuite du point C comme centre & de l'intervalle CD, décrivez une circonférence; & puis de l'autre extrêmité B de la ligne donnée BD, tirez la ſécante BA qui paſſe par le centre du cercle, & coupe la circonférence au point E : prenez BG égale à la partie extérieure BE de la ſécante. Je dis que la ligne BD ſera coupée en moyenne & extrême raiſon au point G; c'eſt-à-dire, qu'on aura la proportion BD . BG : : BG . GD.

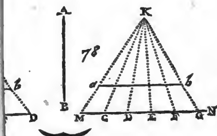
Pour démontrer cette proportion, il faut remarquer 1°. Que la ligne BD eſt une tangente (112), puiſqu'elle eſt par la conſtruction perpendiculaire à l'extrêmité du rayon CD. 2°. Que la ſécante BA paſſant par le centre, la partie interieure EA eſt un diametre, & par conſéquent double du rayon CD. Or par la conſtruction la tangente BD eſt auſſi double de la perpendiculaire CD, donc la partie intérieure EA de la ſécante eſt égale à la tangente BD; d'où il faut conclurre, ſuivant ce que nous avons dit (169), que la tangente BD eſt coupée en moyenne & extrême raiſon au point G.













NAZIONALE "VIT.
NAPO
BIBLIOT



Digitized by Google



LIVRE SECOND.

DES SURFACES ET DES FIGURES PLANES.

FIGURE en général eſt un eſpace renfermé de tous côtez. Il y en a de deux ſortes ; les unes ſont terminées par des lignes ; les autres ſont terminées par des ſurfaces ; celles-ci ſont des *ſolides* dont nous parlerons dans le troiſiéme Livre ; les autres qui ſont terminées par des lignes ſont des *ſurfaces* dont nous devons traiter ici. Or on diſtingue trois eſpeces de ces figures, les *planes*, les *courbes*. & les *mixtes*. Art. I.

2. Les figures planes ſont celles dont tous les points ne ſont ni plus élevez, ni plus enfoncez les uns que les autres : telle eſt ſenſiblement la ſurface des miroirs ordinaires. Voici une autre définition plus exacte : la figure plane eſt celle ſur laquelle une ligne droite étant appliquée ou couchée de quelque maniere que ce ſoit, tous ſes points touchent la ſurface plane. On ſuppoſe ici que la ligne droite n'eſt pas prolongée au-delà de la ſurface.

3. Les figures courbes ſont celles dont les points ſont inégalement élevez ou enfoncés : telle eſt la ſurface d'une boule.

4. Les figures mixtes ſont celles qui ſont en partie planes, & en partie courbes.

5. Les figures planes, qui ſont les ſeules dont nous parlerons dans ce ſecond Livre, ſont encore de trois ſortes ; les rectilignes qui ſont terminées par des lignes droites ; les curvilignes, qui ſont terminées par des li-

gnes courbes ; & enfin les mixtilignes, qui sont terminées par des lignes dont les unes sont droites, & les autres courbes.

6. Remarquez donc qu'il y a de la différence entre une surface ou superficie courbe, & une superficie curviligne; puisqu'une surface plane peut être curviligne, quoiqu'elle ne puisse être courbe : un cercle, par exemple, est une surface curviligne, quoiqu'elle ne soit pas courbe.

Dans les figures rectilignes ausquelles on peut rapporter les deux autres especes de figures planes, il y a trois choses principales à considerer, les côtez, les angles & la surface. Nous considererons d'abord les figures par rapport aux côtez & aux angles qu'ils forment, & ensuite par rapport aux surfaces que ces côtez renferment.

DES FIGURES PLANES, considerées selon leurs côtez & leurs angles.

Si une figure n'est terminée que par des lignes droites, il faut qu'il y en ait au moins trois ; c'est pourquoi l'angle n'est pas une figure.

7. On a donné aux figures rectilignes les plus simples certains noms qu'il ne faut pas ignorer ; la figure de trois côtez s'appelle *triangle*, celle de quatre s'appelle *quadrilatere* ; celle de cinq s'appelle *pentagone*, celle de six, *exagone*, celle de sept, *eptagone*, celle de huit, *octogone*, celle de neuf. *enneagone*, celle de dix, *decagone*, celle de onze, *endecagone*, celle de douze. *dodecagone*, celle de mille, *chiliogone*, celle de dix mille, *myriogone*, celle de plusieurs côtez se nomme indéfiniment *polygone*.

8. Une figure est *réguliere* ou *irréguliere*. La réguliere est celle dont tous les côtez & les angles sont égaux. La figure irréguliere est celle dont tous les angles ou tous les côtez ne sont pas égaux.

9. Quand on compare deux figures enſemble, ſi les angles de l'une ſont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, elles ſont nommées *équiangles* : ſi de plus les côtez homologues ou correſpondans ſont proportionnels, on appelle ces figures *ſemblables*. Ainſi toutes les figures ſemblables ſont équiangles : mais nous prouverons dans la ſuite (52.) que les figures équiangles ne ſont pas toûjours ſemblables. Si les côtez comparez ſont égaux auſſi-bien que les angles, les figures ſont appellées *toutes égales*, ou *égales en tout*, ou *parfaitement égales*.

10. De toutes les figures curvilignes, nous ne conſidererons dans ces Élémens de Géométrie que le cercle ; & des figures mixtilignes, nous ne parlerons que de celles qui ont rapport au cercle : telle eſt celle qu'on nomme *ſegment* dont nous avons donné la notion (Liv. I. Art. 121.), & celle qu'on appelle *ſecteur* de cercle.

11. Un ſecteur de cercle eſt une certaine portion de cercle compriſe entre deux rayons, & l'arc terminé par ces deux rayons : par exemple, l'eſpace marqué par A. Fig. 1.

AVERTISSEMENT. Lorſque dans ce ſecond Livre, on citera quelque article du premier, on mettra entre deux parenteſes Liv. I. Art. & enſuite le nombre de l'Article cité : par exemple pour citer l'Art. 150 du premier Livre, on mettra (Liv. I. Art. 150.) Mais quand on voudra citer un article de ce ſecond Livre, on mettra ſeulement le nombre de l'article cité, comme on l'a fait dans le premier Livre. On obſervera la même choſe dans le troiſiéme Livre ; c'eſt-à dire, que quand on voudra citer un article du premier ou du ſecond Livre, on mettra entre deux parenteſes Liv. I. Art. ou Liv. II. Art. mais lorſqu'il s'agira de citer un article du troiſiéme Livre, on marquera ſeulement le nombre de l'article cité.

DES TRIANGLES.

12. Dans tout triangle il y a trois côtez & trois angles. On prend ordinairement pour *base* du triangle le côté inférieur ; mais on peut prendre pour base tout autre côté du triangle ; par exemple, le côté AC est la
Fig. 2. base du triangle ABC : mais cela n'empêche pas que l'on ne puisse aussi considérer le côté AB ou le côté BC comme base.

13. La ligne perpendiculaire qu'on mene de la pointe d'un angle sur la base, se nomme la hauteur du triangle : telle est la ligne BH. Il peut arriver que cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle ; & pour lors, afin d'avoir la hauteur, il faut prolonger la base du côté où tombe la perpendiculaire : par exemple, si du point E du triangle DEF, on abbaissoit la perpendicu-
Fig. 3. laire EH sur la base DF ; il est clair qu'elle tomberoit en dehors du triangle, & qu'il faudroit prolonger cette base au-delà du point D, afin que la perpendiculaire la rencontrât.

14. Le triangle peut être consideré ou par rapport à ses côtez, ou par rapport à ses angles : si on le considere par rapport à ses côtez, il y en a de trois especes : car ou ses trois côtez sont égaux, & on l'appelle *équilateral* ; tel est le triangle ABC, Fig. 2 ; ou il n'a que deux côtez égaux, comme dans la Fig. 4, & on l'appelle *isocele* ; ou bien enfin ses trois côtez sont inégaux, comme dans la Fig. 5, & on l'appelle *scalene*.

15. Lorsque le triangle est consideré par rapport aux angles, on en distingue encore de trois sortes ; le triangle *rectangle* qui a un angle droit ; tel est le triangle MNO Fig. 5 ; *l'amblygone* ou *obtusangle* qui a un angle obtus ; tel est le triangle EDF Fig. 3 ; & *l'oxygone* ou *acutangle* qui a ses trois angles aigus, comme dans la Fig. 2, ou dans la Fig. 4. Le triangle amblygone & le triangle oxygone sont aussi appellez *obliquangles*,

parce que tous les angles font obliques.

Nous démontrerons dans la fuite, qu'il eft impoffible qu'il y ait dans un triangle deux angles qui foient ou tous deux droits, ou tous deux obtus, ou un droit & un obtus.

Nous fuppofons 1°. qu'il fe peut toûjours faire qu'une circonférence paffe par les fommets des trois angles de chaque triangle : cela fuit évidemment de ce qu'on peut décrire une circonférence qui paffe par trois points donnez, pourvû qu'ils ne foient pas en ligne droite (Liv. I. Art. 32).

Nous fuppofons 2°. qu'on peut confidérer les deux côtez de chaque triangle comme renfermez dans un efpace parallele en tirant par le fommet une ligne parallele à la bafe, comme dans la Fig. 7. Cela pofé, l'on démontre facilement le Théorême fuivant, qui eft un des plus beaux & des plus utiles de toute la Géométrie.

THEOREME PREMIER ET FONDAMENTAL.

16. *Les trois angles d'un triangle pris enfemble font égaux à deux angles droits*, ou, ce qui eft la même chofe, *ces trois angles ont pour mefure la demi-circonférence.*

DEMONSTRATION.

Par la premiere fuppofition, tout triangle, comme ABC, peut être conçu infcrit dans un cercle; alors l'angle A aura pour mefure la moitié de l'arc BC, l'angle B aura pour mefure la moitié de l'arc CA, & l'angle C aura pour mefure la moitié de l'arc AB (Liv. I. Art. 124). Or ces trois arcs font la circonférence entiere; donc les trois moitiez de ces trois arcs, font la demicirconférence; par conféquent les trois angles du triangle pris enfemble, ont pour mefure la demi-circonférence; ils font donc égaux à deux angles droits. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 6.

On peut encore démontrer ce Théorême de la maniere fuivante.

Fig. 7. Tirez par le point C une ligne DE parallele à la baſe AB ; alors les deux angles alternes a & A formez par l'oblique CA, entre les paralleles ſeront égaux : pareillement les deux angles alternes b & B formez par l'oblique CB, ſeront auſſi égaux. Or les trois angles a, C, b pris enſemble ſont égaux à deux angles droits (Liv. I. Art. 57.) : par conſéquent, ſi à la place des deux angles a & b, on prend les deux autres A & B qui leur ſont égaux ; les trois angles A, C, B pris enſemble valent auſſi deux angles droits.

Ce Théorême eſt la fameuſe trente-deuxiéme propoſition du premier Livre d'Euclide.

COROLLAIRE I.

Fig. 8. 17. Si on prolonge un des côtez, comme AB, d'un triangle, l'angle extérieur CBD ou *g* ſera égal aux deux intérieurs oppoſez *m* & *o* pris enſemble : car l'angle extérieur *g* joint à l'angle *n* vaut deux angles droits (Liv. I. Art. 54). De même les angles *m* & *o* joints au même angle *n*, valent auſſi deux angles droits (16). Par conſéquent l'angle extérieur *g* eſt égal aux angles intérieurs oppoſez *m* & *o* pris enſemble. On peut prouver de la même maniere qu'en prolongeant le côté BC, l'angle extérieur ACE ou *h* eſt égal aux deux intérieurs oppoſez *m* & *n* pris enſemble. Pareillement, ſi on prolonge le côté CA, l'angle extérieur BAF ou *k*, ſera égal aux deux intérieurs *o* & *n*.

COROLLAIRE II.

18. Dans chaque triangle, dès que l'on connoît deux angles, on peut facilement connoître le troiſiéme : car le troiſiéme eſt toûjours le ſupplément à 180 degrez ; par exemple, ſi l'on connoît deux angles, dont l'un ſoit de 40 degrez, & l'autre de 80, on eſt aſſuré que le troiſiéme eſt de 60 degrez, parce que les deux premiers pris enſemble, valent 120 degrez : or le ſupplément de 120 degrez à 180 eſt 60.

19. Si dans un triangle on ne connoît que la valeur d'un angle, on pourra bien connoître la ſomme des deux autres angles; mais on ne pourra connoître la valeur de chacun en particulier : ainſi ſi l'angle connu étoit de 50 degrez, on ſçauroit bien que la ſomme des deux autres eſt de 130 degrez; mais on ne connoîtroit pas de combien de degrez ſeroient l'un & l'autre de ces deux angles ſéparément.

COROLLAIRE III.

20. Lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle chacun à chacun, ou que la ſomme des deux dans le premier eſt égale à la ſomme des deux dans le ſecond, pour lors le troiſiéme angle du premier triangle eſt égal au troiſiéme angle du ſecond. Et ſi un angle du premier triangle eſt égal à un angle du ſecond, la ſomme des deux autres dans le premier eſt égale à la ſomme des deux autres dans le ſecond. Cela paroît clairement, tant par le Théorême fondamental, que par ce que l'on vient de dire dans les deux articles qui précedent ce troiſiéme Corollaire.

COROLLAIRE IV.

21. Chaque triangle ne peut avoir qu'un angle droit, ou un ſeul obtus; de ſorte que ſi un angle eſt droit ou obtus, les deux autres ſont néceſſairement aigus : autrement les trois angles pris enſemble, ſeroient plus grands que deux angles droits.

THEORÊME II.

22. *Lorſque dans un triangle il y a des côtez égaux, les angles oppoſez à ces côtez ſont auſſi égaux; & réciproquement s'il y a des angles égaux, les baſes ou côtez oppoſez ſont égaux.*

DEMONSTRATION.

Fig. 6. Soit le triangle ACB, dont le côté AC soit supposé égal au côté BC; je dis 1°. que l'angle en B opposé au côté AC est égal à l'angle en A opposé au côté BC: car les côtez AC & BC étant égaux, les arcs AC & BC qui sont soûtenus par ces côtez, seront égaux, parce que les cordes égales soûtiennent des arcs égaux; donc la moitié de l'arc AC, est égale à la moitié de l'arc BC: or ces moitiez sont les mesures des angles en B & en A (Liv. I. Art. 124.); donc ces angles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

II. PARTIE. Si l'angle en B est égal à l'angle en A, les côtez opposez AC & BC sont égaux: car si les deux angles en B & en A sont égaux, leurs mesures, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AC, & la moitié de l'arc BC sont égales; donc les arcs entiers AC & BC sont aussi égaux. Or les arcs égaux sont soûtenus par des cordes égales; donc les cordes ou côtez AC & BC sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident, que si les trois côtez d'un triangle étoient égaux, les trois angles seroient aussi égaux; & que si les trois angles étoient égaux, les trois côtez le seroient aussi.

THEOREME III.

23. *Lorsque dans un triangle il y a des côtez inégaux, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, & le plus petit angle est opposé au moindre côté.*

DEMONSTRATION.

Fig. 6. Si dans le triangle ACB l'angle en A est plus grand que chacun des deux autres, le côté BC qui lui est opposé est le plus grand de tous: car si l'angle en A est plus grand, il faut que l'arc BC dont il a la moitié pour mesure, soit aussi plus grand que chacun des arcs AB & AC; & par conséquent la corde ou le côté BC sera

ſera plus grand que les autres côtez. Ce qu'il falloit démontrer.

On prouvera de même, que ſi l'angle en C eſt le plus petit, le côté oppoſé AB eſt auſſi moindre que chacun des côtez AC & BC.

THEOREME IV.

24. *Lorſqu'un triangle eſt iſocele, ſi du ſommet de l'angle compris entre les côtez égaux, on abbaiſſe une perpendiculaire ſur la baſe : 1°. Cette baſe ſera coupée en deux parties égales. 2°. L'angle compris entre les côtez égaux ſera auſſi partagé également.*

Soit le triangle iſocele ACB, & que du ſommet de l'angle C, on tire la perpendiculaire CD ſur la baſe AB ; je dis 1°. Que cette perpendiculaire coupe la baſe en deux parties égales. 2°. Qu'elle partage auſſi l'angle C en parties égales. Pour le démontrer, il faut du point C comme centre & de l'intervalle CA ou CB décrire une circonférence, & prolonger la perpendiculaire CD juſqu'à la rencontre de la circonférence en E : cela poſé, le Théorême eſt facile à prouver. Fig. 9.

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. La baſe AB eſt une corde du cercle dont le point C eſt le centre, & par conſéquent la ligne CD qui eſt ſuppoſée perpendiculaire à la corde, la coupe néceſſairement en deux parties égales (Liv. I. Art. 103).

II. PARTIE. La perpendiculaire CDE étant tirée du centre, & coupant la corde AB en deux parties égales, coupe auſſi (Liv. I. Art. 104.) l'arc AEB, ſoûtenu par la corde en deux parties égales, ſçavoir AE & BE. Or AE eſt la meſure de l'angle ACE, & BE eſt la meſure de l'angle BCE ; donc ces angles ſont égaux : ainſi la perpendiculaire coupe l'angle C en deux parties égales. Ce qu'il falloit démontrer.

II. Partie. F

COROLLAIRE.

25. Si on tire du point C une ligne qui divise l'angle C en deux parties égales, il est clair qu'elle ne differera pas de la perpendiculaire CD; par conséquent si une ligne divise en parties égales l'angle compris entre les côtez égaux d'un triangle isocele, elle sera perpendiculaire à la base. Il est évident par la même raison, que si une ligne tirée de cet angle coupe la base en parties égales, elle sera perpendiculaire à la base.

26. On peut distinguer six choses dans un triangle; sçavoir trois côtez & trois angles : mais parce que deux angles étant donnez & déterminez, le troisiéme l'est aussi; il suffira de considérer ici cinq choses; sçavoir, trois côtez & deux angles. Or si dans un triangle, trois de ces cinq choses sont égales aux trois correspondantes dans un autre triangle, les deux triangles sont égaux en tout.

Il y a quatre cas. 1°. Ou bien un des côtez d'un triangle, & les deux angles sur ce côté sont égaux à un côté d'un autre triangle, & aux deux angles sur ce côté. 2°. Ou deux côtez & un angle compris entre ces côtez du premier triangle, sont égaux à deux côtez & à un angle compris entre ces côtez du second. 3°. Ou bien deux côtez & un angle opposé à un de ces côtez dans le premier triangle sont supposez égaux à deux côtez & à un angle opposé à un de ces côtez dans le second triangle. 4°. Enfin il peut arriver que les trois côtez du premier triangle soient égaux aux trois côtez d'un autre triangle, chacun à chacun.

Nous allons démontrer dans les quatre Théorêmes suivans, qu'en tous ces cas, les deux triangles sont égaux, en observant néanmoins que dans le troisiéme cas, il faut encore supposer, que l'autre angle sur la base du premier triangle, est de même espece que son

correſpondant dans le ſecond triangle, comme on le verra dans le ſeptiéme Théorême.

THEOREME V.

27. *Si un côté, comme bc du triangle b a c eſt égal au côté* BC *du triangle* BAC, *& que les deux angles b & c ſur le premier côté, ſoient égaux aux angles* B *&* C *ſur l'autre côté, les deux triangles ſeront égaux en tout.* Fig. 10.

DEMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *bc* appliqué ſur le côté BC, le point *b* ſur le point B, & le point *c* ſur le point C. puiſque les angles *b* & B ſont égaux, le côté *ba* ſera poſé ſur le côté BA ; & de même le côté *ca* ſera appliqué ſur le côté CA, parce que les angles *c* & C ſont égaux ; par conſéquent les deux côtez *ba* & *ca* iront ſe réunir au même point que les deux autres côtez BA & CA ; donc les deux triangles conviendront entierement ; ainſi ils ſeront parfaitement égaux ou égaux en tout, c'eſt-à-dire, quant aux angles, aux côtez & aux eſpaces. Ce qu'il falloit démontrer.

Cette maniere de prouver l'égalité de deux figures en concevant que l'une eſt appliquée ſur l'autre, s'appelle démonſtration par *ſuperpoſition.*

Les deux côtez *bc* & BC étant toûjours ſuppoſez égaux, ſi les deux angles *b* & *a* étoient égaux aux angles correſpondans B & A, les triangles ſeroient parfaitement égaux ; parce que pour lors l'angle *c* ſeroit égal à l'autre angle C : ainſi les deux angles ſur le côté *bc* ſeroient égaux aux deux angles ſur le côté BC : ce qui reviendroit au cinquiéme Théorême.

28. Remarquez qu'il peut arriver que deux triangles ſoient inégaux, quoiqu'un côté du premier ſoit égal à un côté du ſecond, & que les trois angles de l'un, ſoient égaux aux trois angles de l'autre, ſi ces angles égaux ne ſont pas correſpondans : par exemple, dans les deux triangles BAC & BDC, le côté BC eſt commun aux Fig. 11.

deux triangles, & par conséquent il est égal de part & d'autre : il en est de même de l'angle C : d'ailleurs, il se peut faire que l'angle A du grand triangle soit égal à l'angle DBC du petit, & que par conséquent l'angle ABC du grand, soit égal à l'angle BDC du petit.

THEOREME VI.

Fig. 10. 29. *Si deux côtez, comme ab & ac, du triangle abc, sont égaux aux côtez* AB *&* AC *du triangle* ABC, *& que de plus l'angle a compris entre les deux premiers côtez, soit égal à l'angle* A *compris entre les deux autres côtez, les deux triangles seront égaux en tout.*

DEMONSTRATION.

Qu'on concoive le côté *ab* du premier triangle appliqué sur le côté AB de l'autre ; en sorte que le point *a* soit sur le point A ; il faut, à cause de l'égalité des deux angles *a* & A, que le côté *ac* soit posé sur le côté AC, dans cette hypothese le point *b* tombera sur le point B, & le point *c* sur le point C, parce que les deux côtez *ab* & *ac* sont égaux aux côtez AB & AC ; par conséquent la base *bc* conviendra avec la base BC, & les deux triangles conviendront entierement ; donc ils seront égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME VII.

Fig. 12. 30. *Si les deux côtez ab & ac du triangle abc sont encore égaux aux côtez* AB *&* AC *du triangle* ABC, *& que l'angle b opposé au côté ac, soit égal à l'angle* B *opposé au côté* AC ; *si de plus, les angles c &* C *opposez aux autres côtez ab &* AB *sont de même espece, c'est-à-dire, ou tous deux aigus ou tous deux obtus, sans les supposer égaux ; pour lors les deux triangles seront égaux en tout.*

DEMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *ba* posé sur le côté BA, en

ſorte que le point *b* ſoit ſur le point B, & le point *a* ſur le point A; pour lors la baſe *bc* ſera appliquée ſur la baſe BC, à cauſe de l'égalité des angles *b* & B : mais comme les baſes n'ont point été ſuppoſées égales, il faut démontrer que le point *c* tombera ſur le point C : pour cela il faut tirer du point A la perpendiculaire AD ſur la baſe BC prolongée s'il eſt néceſſaire. Cela poſé, je raiſonne ainſi : Les lignes *ac* & AC ſeront toutes les deux du même côté de la perpendiculaire, ou la premiere d'un côté & la ſeconde d'un autre. Or ce ſecond cas eſt impoſſible : car ſi la ligne *ac* tomboit, par exemple, à la gauche de la perpendiculaire, en ſorte que ſon extrêmité *c* fût ſur le point E, tandis que la ligne AC eſt à la droite, il eſt viſible que l'angle *acb* ou AEB ſeroit obtus, & l'angle ACB aigu : ce qui eſt contre l'hypotheſe, puiſque ces deux angles ſont ſuppoſez de même eſpece; par conſéquent il eſt néceſſaire que les deux lignes *ac* & AC ſoient du même côté de la perpendiculaire. Mais d'ailleurs ces deux lignes ſont des obliques égales, ainſi elles doivent être également éloignées de la perpendiculaire : donc *ac* tombera ſur AC, & le point *c* ſur le point C; ainſi les deux triangles conviendront parfaitement; par conſéquent ils ſeront égaux en tout. Ce qu'il fal. dem.

31. Remarquez que ſi les deux angles *b* & B, que l'on a ſuppoſez égaux, étoient droits ou obtus, pour lors les deux angles *c* & C ſeroient aigus, & par conſéquent de même eſpece : c'eſt pourquoi ſi les angles égaux ſont droits ou obtus, on n'a pas beſoin de ſuppoſer la quatriéme condition marquée dans l'énoncé du Théorême, pour que deux triangles ſoient égaux dans le troiſiéme cas.

32. Remarquez encore que ſi on compare deux triangles rectangles, l'angle droit de l'un eſt néceſſairement égal à l'angle droit de l'autre, & par conſéquent ces triangles ſeront égaux, ſi un autre angle & un côté du premier triangle ſont égaux à un angle & au côté cor-

reſpondant du ſecond, ou ſi deux côtez du premier triangle ſont égaux à deux côtez correſpondans du ſecond. Cela ſuit des Théorêmes précedens; car pour lors il y aura trois choſes dans un des triangles rectangles, égales aux trois correſpondantes de l'autre; ainſi ces triangles ſeront égaux.

THEOREME VIII.

33. *Si les trois côtez d'un triangle, comme abc, ſont égaux aux trois côtez d'un autre triangle* ABC, *les deux triangles ſeront parfaitement égaux.*

DEMONSTRATION.

Fig. 13. Pour démontrer ce Théorême, il faut du point C comme centre, & de l'intervalle CB, décrire une circonférence, & enſuite prolonger le côté AC juſqu'à la rencontre de la circonférence au point H. Nous avons démontré (Liv. I. Art. 106.), qu'entre les autres lignes qu'on peut tirer du point A à la circonférence, celle qui eſt terminée à un point plus éloigné du point H, eſt la plus courte. Cela poſé, concevez le côté *ac* appliqué ſur le côté AC, le point *a* ſur le point A, & le point *c* ſur le point C: il eſt viſible que ſi le point *b* tombe ſur le point B, les deux triangles conviendront entierement, & par conſéquent ils ſeront égaux en tout. Or il eſt néceſſaire que le point *b* tombe ſur le point B: car le côté *cb* eſt égal au côté CB; donc il eſt rayon de la circonférence décrite; par conſéquent ſon extrémité *b* doit tomber ſur un point de cette circonférence; il faut donc prouver qu'il ne peut tomber ſur un point différent du point B, par exemple, ſur les points E ou F: ce que je fais voir en cette maniere, après avoir tiré les lignes AE & AF: ſi le point *b* tomboit ſur le point E, le côté *ab* ſeroit égal à la ligne AE: mais AE eſt plus petit que AB (Liv. I. Art. 106.); donc le côté *ab* ſeroit auſſi plus petit que la côte AB; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Au

contraire si le point *b* tomboit sur le point F, le côté *ab* seroit égal à la ligne AF, & par conséquent il seroit plus grand que le côté AB (Liv. I. Art. 106) : ce qui est encore contre l'hypothese. Par conséquent le côté *ac* étant appliqué sur le côté AC, il faut que le point *b* tombe sur le point B : donc les deux triangles conviendront entierement; donc ils sont égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer.

34. Remarquez que si deux côtez, comme AB & AC du triangle BAC sont égaux aux deux côtez *ab* & *ac* d'un autre triangle *bac*, & que l'angle en A soit plus grand que l'angle en *a*, la base BC du premier sera plus grande que la base *bc* du second : car l'angle A étant plus grand que l'angle *a*, l'ouverture des deux premiers côtez sera plus grande, & par conséquent la base sera plus grande que l'autre base. Réciproquement les deux côtez étant toûjours supposez égaux de part & d'autre, chacun à chacun, il est évident que si la base BC est plus grande que la base *bc*, l'angle A sera plus grand que l'angle *a* du second triangle. Fig. 14.

PROBLEME I.

35. *Faire un triangle qui ait un côté égal à la ligne donnée* N, *& les deux angles sur ce côté égaux aux angles donnez* H *&* G.

Tirez BC égale à la ligne donnée N; ensuite tirez aux points B & C des lignes qui fassent sur BC des angles égaux aux angles donnez H & G : ces deux lignes prolongées se rencontreront en un point, comme A, & formeront le triangle BAC avec les conditions proposées. Fig. 15. & 16.

PROBLEME II.

36. *Faire un triangle qui ait deux côtez égaux aux lignes données* L *&* M, *& l'angle compris entre ces côtez égal à l'angle donné* K.

Tirez une ligne AB égale à une des proposées L ; & de l'extrêmité A tirez la ligne AC, que vous prendrez égale à l'autre proposée M, & qui fasse l'angle BAC égal à l'angle K, ensuite menez une ligne du point B au point C ; elle formera le triangle cherché ABC.

PROBLEME III.

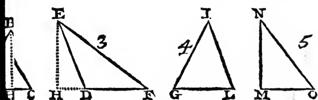
Fig. 15. & 17. 37. *Faire un triangle qui ait deux côtez égaux à deux lignes données* L *&* M, *& l'angle opposé à l'une de ces lignes* M, *égal à l'angle donné* H.

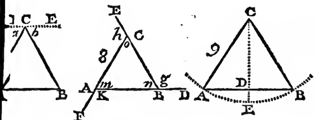
Tirez l'indéterminée BZ, puis à une de ses extrêmitez, comme B, tirez la ligne AB qui soit égale à L, & qui fasse avec BZ un angle égal à l'angle donné H ; ensuite du point A pris pour centre, & d'un intervalle égal à l'autre ligne M, décrivez un arc de cercle qui coupera la ligne BZ dans un seul point, si la ligne M est plus grande ou égale à la premiere ligne L ; c'est pourquoi tirant une ligne du point A au point d'intersection de l'arc & de l'indéterminée BZ, on aura le triangle BAC fait selon les conditions proposées.

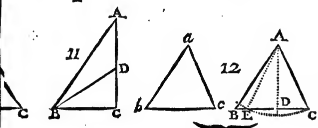
Fig. 15. & 18. Mais si la ligne M étoit plus petite que L, comme on le suppose dans la Fig. 15, & que cependant elle fût plus grande que la perpendiculaire AD ; alors l'arc décrit du point A & de l'intervalle de la ligne M, couperoit BZ en deux points ; c'est pourquoi afin de déterminer le triangle, il faut sçavoir si l'angle opposé au côté AB doit être obtus ou aigu ; s'il est obtus, tirez AE ; s'il est aigu, tirez AC, & vous aurez le triangle cherché BAE dans le premier cas, & BAC dans le second.

Si la ligne M étoit égale à la perpendiculaire, pour lors l'arc toucheroit BZ seulement au point D : ainsi la ligne qu'il faudroit tirer du point A pour achever le triangle, seroit la perpendiculaire même.

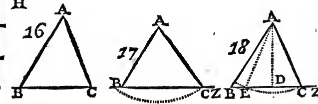
Enfin si la ligne M étoit plus courte que la perpendiculaire, le Problême seroit impossible, parce qu'une ligne tirée du point A & égale à M, ne rencontreroit pas l'indéterminée BZ.


B
H C
E
3
H D F
I
4
G L
N
5
M O


C E
B
E
h C
o
8
A m n g
K B D
F
C
9
D
A B
E


C
A
11
D
B C
a
b c
12
A
D
B E C


A
C
H
A
14
B C
a
b c


A
16
B C
A
17
B C Z
A
18
D
B E C Z

PROBLEME IV.

38. *Faire un triangle qui ait les trois côtez égaux aux trois lignes données* L, M, N. Fig. 15. & 16.

Tirez une ligne BC égale à une des lignes proposées N; ensuite de l'une de ses extrêmitez B comme centre & de l'intervalle de la ligne L, décrivez un arc; & de l'autre extrêmité C, & de l'intervalle de la ligne donnée M, décrivez un second arc qui coupe le premier au point A: enfin menez des lignes des points B & C au point d'intersection A, & vous aurez le triangle cherché BAC.

39. Il faut remarquer que deux des lignes données prises ensemble, doivent être plus grandes que la troisiéme: par exemple, dans la Fig. 16 les deux côtez AC & BC pris ensemble sont nécessairement plus grands que le troisiéme côté, parce que AB étant une ligne droite tirée du point A au point B, il faut qu'elle soit plus courte que ACB (Liv. I. Art. 5.)

On peut aisément par la méthode de ce problême faire un triangle régulier ou équilateral, soit que le côté soit donné ou qu'il ne le soit pas.

DU PERIMETRE ET DES ANGLES du Quadrilatere.

Le *quadrilatere*, comme nous avons dit, est une figure terminée par quatre lignes droites: la ligne droite qui est tirée d'un angle du quadrilatere à l'angle opposé, comme AD dans la Fig. 19, se nomme *diagonale.*

40. Si un quadrilatere n'a aucun de ses côtez paralleles, ou s'il n'en a que deux, on le nomme *trapeze*; tel est le quadrilatere de la Fig. 19: mais lorsque chaque côté est parallele au côté opposé, le quadrilatere est appellé *parallelogramme*, comme CABD Fig. 23. Si les angles du parallelogramme sont droits, il est appellé *rectangle*; & si tous les côtez du rectangle sont égaux,

on le nomme *quarré*, comme ABCD, Fig. 21. Mais lorſque les ſeuls côtez oppoſez du rectangle ſont égaux, on l'appelle rectangle *oblong*, comme dans la Fig. 20. Si les angles du parallelogramme ſont obliques, il s'appelle *obliquangle*. Il y en a de deux ſortes : le *Rhombe* & le *Rhomboïde*. Un Rhombe eſt un parallelogramme obliquangle dont les quatre côtez ſont égaux, comme ABCD Figure 22. Un Rhomboïde eſt un parallelogramme obliquangle dont les ſeuls côtez oppoſez ſont égaux, tel eſt celui de la Fig. 23 : ainſi en reprenant tout ce qu'on vient de dire, on trouvera les diviſions ſuivantes. Le quadrilatere ſe diviſe d'abord en trapeze & en parallelogramme. Il y a deux eſpeces de parallelogrammes, le rectangle & l'obliquangle. Le rectangle ſe ſubdiviſe en quarré & en rectangle oblong. De même on ſubdiviſe le parallelogramme obliquangle en Rhombe & en Rhomboïde. Le rectangle oblong ſe nomme ſouvent rectangle, ſans ajoûter *oblong*.

On peut donc définir 1°. le parallelogramme, un quadrilatere dont les côtez oppoſez ſont paralleles. 2°. Le rectangle, un parallelogramme dont les angles ſont droits, & par conſéquent égaux. 3°. Le quarré, un rectangle dont les côtez ſont égaux.

Il ſuit des notions qu'on vient de donner, que tout parallelogramme eſt quadrilatere ; mais tout quadrilatere n'eſt pas parallelogramme : de même tout rectangle eſt parallelogramme : mais tout parallelogramme n'eſt pas rectangle : enfin tout quarré eſt rectangle, mais tout rectangle n'eſt pas quarré. Le ſeul mot de *rectangle* ſignifie la même choſe que *parallelogramme rectangle* : mais pour ſignifier un triangle rectangle il ne ſuffiroit pas de dire ou d'écrire *un rectangle*, il faut ajoûter le mot de triangle, en diſant *un triangle rectangle*.

41. Nous obſerverons ici trois choſes. 1°. Un quadrilatere peut être déſigné ou par quatre lettres placées au

ſommet des angles, ou ſeulement par deux lettres qui ſont au ſommet des angles oppoſez : ainſi le quadrilatere de la Figure 19 peut être déſigné par les quatre lettres A, C, D, B, ou par les deux A, D, ou enfin par les deux autres B, C. 2°. Quand on dit le quarré d'une ligne, on entend un quarré dont chacun des côtez eſt égal à la ligne : par exemple, le quarré de la ligne EF (Figure 21.) eſt un quarré comme ABCD, dont chaque côté eſt égal à EF. 3°. Lorſqu'on veut déſigner le quarré d'une ligne, telle que EF, on écrit $\overline{EF}^2$; ainſi cette expreſſion $\overline{EF}^2$ ſignifie le quarré de la ligne EF.

42. Il faut remarquer que dans tout le quadrilatere, comme ACDB, la ſomme des quatre angles eſt toûjours égale à quatre angles droits ; car ſi on tire la diagonale AD, elle diviſera le quadrilatere en deux triangles, dont les angles ſeront formez des angles même du quadrilatere. Or, comme nous avons démontré ci-deſſus, les trois angles du triangle ſont égaux à deux angles droits, donc tous les angles des deux triangles ſont égaux à quatre angles droits ; & par conſéquent tous les angles du quadrilatere pris enſemble, valent quatre angles droits. Fig. 19.

43. Dans tout parallelogramme, comme CABD, les côtez oppoſez AB & CD, ou AC & BD ſont égaux entr'eux ; de plus les deux angles ſur le même côté, comme A & B, ou A & C pris enſemble, ſont égaux à deux angles droits ; enfin les angles oppoſez comme A & D, ou C & B ſont égaux entr'eux. Tout cela a été démontré en parlant des paralleles (Liv. I. Art. 97.) Fig. 23.

44. De là il ſuit 1°. que ſi on tire une diagonale, comme AD, dans un parallelogramme, elle le diviſera en deux parties égales qui ſont les triangles ACD & DBA (33.) ; car les trois côtez du premier, ſçavoir AC, CD & AD ſont égaux aux trois côtez BD, AB & AD du ſecond.

2°. Que dans tout parallelogramme un angle, comme A, ne peut être droit que tous les autres angles ne le ſoient auſſi : car ſi l'angle A eſt droit, ſon oppoſé D le ſera auſſi : de même l'angle B ſera droit, parce que les deux angles A & B valent enſemble deux angles droits : donc l'angle C oppoſé à B ſera auſſi droit.

3°. Que ſi deux côtez, comme AC & AB qui forment l'angle CAB, ſont égaux, les deux autres côtez ſont auſſi égaux, parce que BD eſt égal à AC, & CD eſt égal à AB.

PROBLEME.

45. *Faire un parallelogramme qui ait ſes côtez égaux aux lignes données* M *&* N, *&* *un angle égal à l'angle donné* O.

Faites l'angle en A égal à l'angle donné O ; & ſur les côtez prenez AB & AC égaux aux lignes données M & N ; enſuite du point C & de l'intervalle AB décrivez un arc de cercle, & du point B & de l'intervalle AC décrivez un autre arc qui coupe le précédent en D, tirez les lignes CD & BD, & vous aurez le parallelogramme propoſé.

Il eſt aiſé de concevoir que le quadrilatere CABD aura ſes côtez égaux aux lignes données M & N, puiſque les deux côtez AB & AC ont été pris égaux à ces lignes, & que d'ailleurs les arcs ont été décrits de l'intervalle de ces mêmes lignes M & N ; ce qui fait voir que les autres côtez CD & BD ſont égaux aux premiers. Or les côtez oppoſez ne peuvent être égaux ſans qu'ils ſoient paralleles : car que l'on conçoive une diagonale tirée du point A au point D, le quadrilatere ſera diviſé en deux triangles parfaitement égaux (33), puiſque les trois côtez de l'un ſeront égaux aux trois côtez de l'autre ; ainſi l'angle ADC du triangle ſupérieur eſt égal à l'angle DAB du triangle inférieur, puiſque ces deux angles ſont oppoſez à des côtez égaux ; & par conſéquent ces deux

angles égaux étant alternes, les deux côtez CD & AB ſont paralleles (Liv. I. Art. 95). Par la même raiſon les deux côtez AC & BD ſont paralleles, puiſque les angles alternes DAC & ADB, qui ſont des angles oppoſez à des côtez égaux dans les deux triangles, ſont égaux; donc le quadrilatere CABD eſt un parallelogramme.

Si on propoſe ſeulement de faire un parallelogramme, en ſorte que l'angle O ne ſoit pas donné, ni les côtez M & N, on fera l'angle en A à diſcrétion, & on prendra les côtez AB & AC de quelle longueur on voudra; ainſi le Problême en ſera plus facile.

46. On peut ſe ſervir de la même méthode pour faire un quarré, pourvû qu'on tire la ligne AC perpendiculaire & égale au côté AB.

Après avoir traité des triangles & des quadrilateres, conſidérez ſelon leurs côtez & leurs angles, qui ſont les deux eſpeces de figures les plus ſimples, nous allons parler 1°. Des polygones en général. 2°. Des polygones ſemblables. 3°. Des polygones réguliers.

DES POLYGONES EN GENERAL.

Nous avons donné ci-deſſus (7 & 8) la définition du polygone en général & celle d'un polygone regulier.

THEOREME.

47. *Tous les angles d'un polygone quelconque, ſont égaux à deux fois autant d'angles droits moins quatre que le polygone a de côtez.* Par exemple, ſi le polygone a cinq côtez, pour connoître combien d'angles droits valent tous les angles de ce polygone, il n'y a qu'à prendre le double de cinq, & l'on aura dix, dont il faut ôter quatre, & il reſte ſix; ainſi tous les angles du pentagone pris enſemble valent ſix angles droits. De même ſi l'on veut connoître combien d'angles droits valent tous les angles d'un polygone de 1000 cotez, il n'y a

qu'à doubler 1000, & on aura 2000, dont il faut ôter quatre, il reſte 1996 ; ce qui marque que tous les angles d'un polygone de 1000 côtez valent 1996 angles droits.

DEMONSTRATION.

Fig. 24. Du point A ſommet d'un des angles de la Figure, il faut tirer des lignes à tous les autres angles, excepté aux deux plus proches, qui ſont B & E ; ces lignes formeront autant de triangles, moins deux, qu'il y a de côtez ou d'angles dans le polygone ; en ſorte que s'il y a cinq côtez, il y aura cinq triangles moins deux, c'eſt-à-dire, trois : de plus, les angles de ces triangles ne ſont formez que des angles du polygone. Cela poſé, je raiſonne ainſi : S'il y avoit autant de triangles qu'il y a de côtez dans le polygone, comme les angles de chaque triangle valent deux angles droits, les angles des triangles formez dans le polygone vaudroient autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtez dans le polygone; c'eſt-à-dire, que les angles du polygone pris enſemble ſeroient égaux à deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtez : mais il n'y a pas autant de triangles qu'il y a de côtez, il s'en faut deux, & les angles de deux triangles valent quatre angles droits : par conſéquent les angles du polygone valent deux fois autant d'angles droits moins quatre, qu'il y a de côtez dans le polygone. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut énoncer ce Théorême autrement, en cette maniere : tous les angles d'un polygone quelconque, ſont égaux à deux fois autant d'angles droits, que le polygone a de côtez moins deux ; par exemple, le pentagone ayant cinq côtez, il faut en ôter deux ; il en reſtera trois, dont le double qui eſt ſix, marque que les angles du pentagone valent ſix angles droits.

COROLLAIRE I.

48. Si on prolonge d'un côté chacune des lignes qui font le perimetre d'un polygone, tous les angles externes qui sont ici FAB, GBC, HCD, KDE, LEA pris ensemble seront égaux à quatre angles droits : car chaque angle interne comme EAB, & l'angle externe FAB, qui est son supplément, valent ensemble deux angles droits (Liv. I. Art. 54.) ; & par conséquent, en prenant conjointement les angles tant internes, qu'externes du polygone, on aura autant de fois la valeur de deux angles droits, qu'il y a d'angles internes ou de côtez dans le polygone ; c'est-à-dire, que les angles internes & externes pris ensemble sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a de côtez dans le polygone. Or les seuls angles internes valent deux fois autant d'angles droits moins quatre, qu'il y a de côtez ; donc la somme de tous les angles externes d'un polygone, ne vaut que quatre angles droits. Fig. 25.

COROLLAIRE II.

49. La somme des angles externes d'un polygone, est égale à la somme des angles externes d'un autre polygone, soit que les polygones ayent le même nombre de côtez, soit que l'un en ait plus que l'autre. Cela suit évidemment du premier Corollaire, puisque l'une & l'autre somme est égale à quatre angles droits.

COROLLAIRE III.

50. Lorsque deux polygones réguliers ont chacun le même nombre de côtez, les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre : par exemple, soient deux pentagones réguliers ; je dis que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun : car les cinq angles d'un pentagone sont égaux à six angles droits par le Théorême. Or ces cinq angles sont égaux entr'eux, puisque l'un & l'autre pentagone est régulier ; donc cha-

cun des angles eſt la cinquiéme partie de ſix angles droits dans l'un & l'autre pentagone ; ainſi les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre.

Des Polygones ou figures ſemblables.

51. Nous avons dit, (9.) que deux figures ſont ſemblables, lorſque chaque angle de l'une eſt égal à chaque angle de l'autre dans le même ordre, & que les côtez de la premiere ſont proportionnels aux côtez cor-
Fig. 31. reſpondans de la ſeconde. Ces côtez correſpondans, comme *ab* & AB, *bc* & BC, *cd* & CD, *de* & DE, *ef* & EF, &c. ſont appellez *homologues*.

Dans deux triangles ſemblables, les côtez homologues ou correſpondans, ſont ceux qui ſont oppoſez à des angles égaux : ainſi dans la Fig. 28, les côtez *ab* & AB ſont homologues, parce que les angles *c* & C oppoſez à ces côtez ſont égaux : de même les côtez *ac* & AC ſont homologues, parce que les angles *b* & B qui leur ſont oppoſez ſont égaux ; il en eſt de même des deux autres côtez *cb* & CB.

Fig. 26. 52. Remarquez que les angles d'un polygone peuvent être égaux aux angles d'un autre polygone, chacun à chacun, quoique les côtez de l'un ne ſoient pas proportionnels à ceux de l'autre : car ſoient, par exemple, deux exagones ſemblables, le premier *abcdef*, & le ſecond ABCDEF : ſi vous prolongez deux côtez du ſecond, comme BC & ED, (il en faut choiſir deux qui ſoient ſéparez l'un de l'autre par un troiſiéme, qui eſt ici CD,) & ſi vous tirez la ligne GH parallele au côté CD, vous aurez un troiſiéme exagone ABGHEF dont les angles ſont égaux à ceux du ſecond à cauſe des paralleles GH & CD ; par conſéquent les angles de ce troiſiéme exagone ſont auſſi égaux à ceux du premier. Cependant les côtez du troiſiéme exagone ne ſont pas proportionnels à ceux du premier : car les côtez de l'exagone ABCDEF étant par l'hypotheſe, proportionnels à ceux du

du premier, il eſt impoſſible que les côtez du troiſiéme exagone, ſoient auſſi proportionnels aux côtez du premier.

Réciproquement les côtez d'un polygone peuvent être Fig. 17.
proportionnels aux côtez d'un autre polygone, quoique les angles de l'un ne ſoient pas égaux aux angles de l'autre: car ſoient encore deux exagones ſemblables, le premier *abcdef*, & le ſecond ABCDEF; tirez des deux angles B & F, les deux lignes BG & FL égales aux deux côtez BC & FE, (il faut choiſir deux angles qui ſoient ſeparez par trois autres, qui ſont ici C, D, E:) enſuite du point G & de l'intervalle CD, décrivez un arc vers le point D: parcillement du point L & de l'intervalle ED, décrivez un autre arc qui coupe le premier en un point, comme H: enfin tirez les lignes GH & LH, vous aurez un troiſiéme exagone ABGHLF dont les côtez ſont égaux par la conſtruction à ceux du ſecond, & par conſéquent proportionnels à ceux du premier: cependant il eſt viſible que les angles du troiſiéme exagone ne ſont pas égaux aux angles du ſecond, ni par conſéquent à ceux du premier.

Il faut conclurre de-là, qu'afin de pouvoir aſſurer que deux polygones ſont ſemblables, il eſt néceſſaire de ſçavoir que les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, & de plus que les côtez du premier ſont proportionnels à ceux du ſecond. Il faut néanmoins excepter les triangles de cette remarque, parce que nous allons faire voir dans le Théorême ſuivant, que quand deux triangles ont les angles égaux, c'eſt-à-dire, que les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, les côtez ſont proportionnels: & réciproquement lorſque les côtez d'un triangle ſont proportionnels aux côtez de l'autre, les angles du premier ſont égaux à ceux du ſecond, chacun à chacun (59.); ainſi il ſuffit de ſçavoir que deux triangles ont une de ces conditions, pour pouvoir aſſurer qu'ils ſont ſemblables.

THEOREME PREMIER ET FONDAMENTAL.

53. *Lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun, les côtez du premier ſont proportionnels aux côtez homologues du ſecond, ainſi les deux triangles ſont ſemblables.*

Fig. 18. Soient les deux triangles *abc* & ABC, en ſorte que l'angle *a* du premier ſoit égal à l'angle A du ſecond, & l'angle *b* égal à l'angle B; je dis que les côtez de l'un ſont proportionnels aux côtez homologues de l'autre; c'eſt-à-dire, que l'on a les trois proportions. 1°. *ca*. CA :: *cb*. CB. 2°. *bc*. BC :: *ba*. BA. 3°. *ab*. AB :: *ac*. AC. Avant que de le démontrer, il faut remarquer que les angles *c* & C ſont néceſſairement égaux, parce que deux angles d'un triangle ne peuvent être égaux à deux angles d'un autre triangle, que le troiſiéme angle du premier ne ſoit égal au troiſiéme du ſecond. (20)

DEMONSTRATION.

1°. *ca*. CA :: *cb*. CB : car nous avons démontré (Liv. I. Art. 153.), que ſi deux lignes tirées du même point ſont autant inclinées ſur une baſe, que deux autres lignes le ſont ſur une autre baſe, alors les deux premieres ſont proportionnelles aux deux autres. Or les deux lignes *ca* & *cb* ſont autant inclinées ſur la baſe *ab*, que les deux lignes CA & CB le ſont ſur la baſe AB (Liv. I. Art. 160.); puiſque les deux angles *a* & *b* ſont égaux aux deux angles A & B; par conſéquent on a la proportion, *ca*. CA :: *cb*. CB.

2°. *bc*. BC :: *ba*. BA : car les deux angles *a* & *c* étant égaux aux deux autres angles A & C, les deux lignes *bc* & *ba* ſont autant inclinées ſur la baſe *ac*, que les deux lignes BC & BA le ſont ſur la baſe AC; par conſéquent on a la proportion, *bc*. BC :: *ba*. BA.

3°. *ab*. AB : : *ac*. AC. Cette proportion peut être démontrée de la même maniere que les deux autres, en considérant les lignes *bc* & BC, comme bases. Au lieu de ces trois proportions, on auroit pû mettre leurs alternes.

Lorsque les angles d'un triangle sont égaux aux angles d'un autre, chacun à chacun, ces triangles sont appellez *equiangles*. Ainsi les triangles equiangles sont semblables.

54. Remarquez qu'afin d'être assuré que deux triangles isoceles sont semblables, il suffit de sçavoir qu'un angle du premier triangle est égal à l'angle correspondant du second : par exemple, les deux côtez *ca* & *cb* du triangle *acb* étant supposez égaux ; & les deux côtez CA & CB du triangle ACB étant aussi égaux entr'eux ; si les deux angles *c* & C sont chacun de 50 degrez, il est nécessaire que les deux angles égaux *a* & *b* du premier triangle ayent chacun 65 degrez, & que les deux angles A & B du second, qui sont aussi égaux entr'eux, ayent pareillement chacun 65 degrez. Par conséquent les deux triangles sont semblables.

Il ne faut pas confondre dans ce Théorême ni dans les suivans, la signification de ces termes *semblables*, *égaux* & *proportionnels* : le terme *semblables* doit s'employer pour les triangles & les autres figures, le mot *égaux* se dit des angles, & le terme *proportionnels* s'applique aux côtez des figures : ainsi on dit que deux figures sont semblables, que leurs angles sont égaux, & que leurs côtez sont proportionnels. Il arrive souvent aux commençans de faire une fausse application de ces termes, en disant, par exemple, que les angles des figures semblables sont proportionnels, ou que leurs côtez sont semblables.

Les trois Théorêmes suivants répondent au sixiéme, septiéme & huitiéme (29, 30 & 33.) qu'on a démontrez sur les triangles égaux.

THEOREME II.

Fig. 19. 55. *Si les deux côtez ab & ac d'un triangle sont proportionnels aux côtez* AB *&* AC *d'un autre triangle, & que les angles compris a &* A *soient égaux, les deux triangles sont semblables.*

DEMONSTRATION.

Prenez sur AB la ligne *ad* égale au côté *ab* du petit triangle, & tirez *df* parallele à BC. Cela posé, je démontre ainsi le Théorême : puisque *df* est parallele à BC, les angles *d* & *f* sont égaux aux angles B & C ; & par conséquent les deux triangles *d* A *f* & BAC sont semblables. Il n'y a donc plus qu'à faire voir que le triangle *bac* est égal en tout au triangle *d* A*f*.

Par l'hypothese *ab*. *ac* : : AB. AC. D'ailleurs à cause des triangles semblables *d* A *f* & BAC, on a la proportion A*d*. A*f* : : AB. AC. De plus, la seconde raison est la même dans ces deux proportions ; donc les deux premieres raisons sont égales, c'est-à-dire, que *ab* . *ac* : : A*d* . A*f*, & *alternando*, *ab* . A*d* : : *ac* . A*f*. Or dans cette derniere proportion, les deux termes de la premiere raison sont égaux ; parce que l'on a pris A*d* égal à *ab* ; donc les deux termes de la seconde raison sont aussi égaux ; ainsi les deux côtez *ab* & *ac* du triangle *bac* sont égaux aux côtez A*d* & A*f* du triangle *d*A*f*. Mais d'ailleurs les angles *a* & A sont supposez égaux ; donc les deux triangles *bac* & *d*A*f* sont égaux en tout (29) ; par conséquent le petit triangle *bac* est semblable au grand triangle BAC. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME III.

Fig. 19. 56. *Si les deux côtez ab & ac d'un triangle sont proportionnels aux côtez* AB *&* AC *d'un autre triangle, & que les angles b &* B *opposez aux côtez ac &* AC*, soient égaux ; si de plus les angles c &* C *sont de même espece ; pour lors les deux triangles sont semblables.*

DEMONSTRATION.

Prenez A*d* égal à *ab*, & tirez *df* parallele à BC : il eſt évident que les angles *d* & *f* ſeront égaux aux angles B & C, & que les triangles *dAf* & BAC ſeront ſemblables. Reſte donc à prouver que le triangle *bac* eſt égal en tout au triangle *dAf*.

Par l'hypotheſe *ab* . *ac* :: AB . AC. D'ailleurs la ſimilitude des triangles *dAf* & BAC donne A*d* . A*f* :: AB . AC. Ainſi puiſque dans ces deux proportions la ſeconde raiſon eſt la même, les deux premieres ſont égales, c'eſt-à-dire, que *ab* . *ac* :: A*d* . A*f*, & *alternando*, *ab* . A*d* :: *ac* . A*f*. Or dans cette derniere proportion les deux termes de la premiere raiſon ſont égaux ; donc ceux de la ſeconde le ſont auſſi : les deux côtez *ab* & *ac* du triangle *bac* ſont donc égaux aux côtez A*d* & A*f* du triangle *dAf*. D'ailleurs l'angle *b* étant égal à l'angle B, il eſt auſſi égal à l'angle *d* ; Pareillement l'angle *c* étant de même eſpece que l'angle C, il faut qu'il ſoit de même eſpece que l'angle *f*. Par conſéquent les deux triangles *bac* & *dAf* ſont égaux en tout (30). Donc le petit triangle *bac* eſt ſemblable au grand triangle BAC. Ce qu'il falloit démontrer.

57. Remarquez que ſi les deux angles égaux *b* & B étoient droits ou obtus, il ne ſeroit pas néceſſaire de ſuppoſer que les deux angles *c* & C ſont de même eſpece, parce que cela s'enſuivroit néceſſairement ; puiſque les deux angles *b* & B étant droits ou obtus, il faut que les angles *c* & C ſoient aigus (21).

58. Remarquez encore que ſi on compare deux triangles rectangles, l'angle droit de l'un eſt néceſſairement égal à l'angle droit de l'autre ; & par conſéquent ces triangles ſeront ſemblables, ſi un autre angle du premier eſt égal à un autre angle du ſecond, ou ſi deux côtez du premier triangle ſont proportionnels à deux côtez correſpondans du ſecond : car pour lors ces deux

triangles auront les conditions marquées dans les Théorêmes précedens, afin que deux triangles soient semblables.

THEOREME IV.

Fig. 29. 59. *Si les trois côtez ab, ac & bc d'un triangle sont proportionnels aux trois côtez* AB, AC *&* BC *d'un autre triangle, les angles du premier sont égaux aux angles du second, chacun à chacun; ainsi les triangles sont semblables.* Ce Théorême est la proposition inverse du Théorême fondamental.

DEMONSTRATION.

Prenez sur le côté AB, la ligne A*d* égale à *ab*, & tirez *df* parallele à BC; il est évident que le triangle *d*A*f* est semblable au triangle BAC. Il faut donc démontrer que les deux triangles *bac* & *d*A*f* sont égaux en tout.

Les côtez du triangle *bac* sont par l'hypothese proportionnels à ceux du triangle BAC. On a donc les proportions *ab*. *ac* : : AB. AC, & *ab*. *bc* : : AB. BC. D'ailleurs la similitude des triangles *d*A*f* & BAC donne aussi les proportions A*d*. A*f* : : AB. AC. & A*d*. *df* : : AB. BC. Or dans la premiere & la troisiéme proportion, la seconde raison est la même : par conséquent les premieres raisons sont égales, c'est-à-dire, que *ab*. *ac* : : A*d*. A*f*, & *alternando*, *ab*. A*d* : : *ac*. A*f*. Ainsi puisque *ab* $=$ A*d*, il s'ensuit que *ac* $=$ A*f*. On conclura pareillement de la seconde & de la quatriéme proportion que *bc* $=$ *df*. Les trois côtez du triangle *bac* sont donc égaux aux trois côtez du triangle *d*A*f*; par conséquent ces deux triangles sont égaux en tout (33). Ainsi le triangle *bac* est semblable au triangle BAC.

60 On peut remarquer ici que quand deux triangles sont semblables, les quarrez des côtez homologues sont proportionnels : par exemple, dans la Fig. 28.
Voyez art. 41. $\overline{ca}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{cb}^2 . \overline{CB}^2$: car les deux triangles étant sem-

blables : on a la proportion *ca* . CA : : *cb* . CB ; & par conſéquent les quarrez de ces côtez ſont auſſi proportionnels. Cette remarque a lieu toutes les fois que quatre lignes ſont proportionnelles, parce qu'on a démontré dans le traité des proportions, que lorſque quatre grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrez le ſont auſſi. Il en eſt de même des cubes & des autres puiſſances ſemblables.

COROLLAIRE.

61. Il paroît évidemment par les démonſtrations des trois précedens Théorêmes, que ſi un triangle eſt ſemblable à un autre, & que l'un des côtez du premier ſoit égal au côté homologue du ſecond, les autres côtez du premier ſont égaux aux autres côtez du ſecond ; & par conſéquent (33.) les deux triangles ſont égaux en tout. Cela a déja été démontré (27).

Ces quatre Théorêmes ſervent à trouver les côtez & les angles d'un triangle dont on connoît déja trois choſes : ſçavoir, ou deux angles & un côté, ou deux côtez & un angle, ou les trois côtez. Nous ferons voir dans la Trigonométrie comment il faut s'y prendre pour trouver le reſte d'un triangle dont on connoît les trois choſes que nous venons de marquer.

Lorſqu'un triangle eſt rectangle, le côté oppoſé à l'angle droit eſt nommé *hypotenuſe* : par exemple, dans la figure 30 le côté BC oppoſé à l'angle droit eſt l'hypotenuſe de ce triangle. Fig. 30.

THEOREME V.

62. *Si du ſommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abbaiſſe une perpendiculaire ſur l'hypotenuſe, le triangle ſera diviſé en deux autres ſemblables chacun au grand triangle, & ſemblables entr'eux : de plus on aura trois moyens proportionnels : ſçavoir les deux côtez de l'angle droit & la perpendiculaire ; chaque côté de l'angle droit ſera moyen proportionnel entre l'hypotenuſe entiere & ſa*

partie correſpondante, & la perpendiculaire ſera moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypotenuſe.

Soit le triangle BAC rectangle en A : je dis que ſi du ſommet de l'angle droit A, on abbaiſſe la perpendiculaire AD ſur l'hypotenuſe, le triangle total BAC ſera diviſé en deux triangles ; ſçavoir, ADB & ADC, qui ſont chacun ſemblables au grand triangle, & ſemblables entr'eux : de plus on aura trois moyennes proportionnelles, 1°. La ligne AB qui eſt un des côtez de l'angle droit, moyenne entre la baſe BC & la partie correſpondante BD. 2°. La ligne AC qui eſt l'autre côté de l'angle droit, moyenne entre la même baſe BC & ſon autre partie correſpondante DC. 3°. La perpendiculaire AD moyenne entre les deux parties BD & DC de la baſe.

DEMONSTRATION.

1°. Le triangle partiel ADB eſt ſemblable au triangle total BAC : car l'angle *m* du triangle partiel eſt droit à cauſe de la perpendiculaire AD ; cet angle eſt donc égal à l'angle A du grand triangle qui eſt auſſi droit. D'ailleurs l'angle B eſt commun à ces deux triangles ; il y a donc deux angles du petit triangle égaux à deux angles du grand ; donc le troiſiéme angle *o* du petit eſt égal à l'angle C qui eſt le troiſiéme du grand ; & les triangles ſont ſemblables ; par conſéquent les côtez homologues ſont proportionnels. Or BD côté du petit triangle eſt homologue à AB côté du grand, puiſque les deux angles *o* & C oppoſez à ces deux côtez ſont égaux : de même AB conſideré comme côté du petit triangle, eſt homologue à BC côté du grand ; parce que les angles oppoſez *m* & A ſont égaux : ainſi on a la proportion BD . AB : : AB . BC ; ou en faiſant changer de place aux extrêmes, BC . AB : : AB . BD. Donc le côté AB eſt moyen proportionnel entre BC baſe du grand triangle & ſa partie BD.

2°. L'autre triangle partiel ADC eſt auſſi ſemblable au triangle total BAC : car l'angle *n* du triangle partiel eſt droit ; & par conſéquent égal à l'angle droit A du grand triangle. D'ailleurs l'angle C eſt commun à ces deux triangles ; donc le troiſiéme angle *p* du petit eſt égal à l'angle B, qui eſt le troiſiéme du grand ; & les deux triangles ſont ſemblables ; par conſéquent les côtez homologues ſont proportionnels. Or DC côté du petit triangle eſt homologue à AC côté du grand, parce que les angles oppoſez *p* & B ſont égaux : de même AC conſidéré comme côté du petit triangle eſt homologue à BC côté du grand ; parce que les angles *n* & A qui ſont oppoſez à ces côtez ſont égaux. On a donc la proportion DC . AC : : AC . BC, ou en faiſant changer de place aux extrêmes, BC. AC : : AC. DC : ainſi le côté AC du grand triangle eſt moyen proportionnel entre la baſe BC & l'autre partie DC.

3°. Les deux triangles partiels ADB & ADC ſont ſemblables entr'eux. Cela ſuit de ce qu'on vient de prouver dans les deux premieres parties de cette démonſtration ; l'angle *o* du premier eſt donc égal à l'angle C du ſécond ; par conſéquent les côtez oppoſez à ces angles : ſçavoir, BD dans le premier, & AD dans le ſecond ſont homologues. Pareillement l'angle B du premier triangle eſt égal à l'angle *p* du ſecond ; par conſéquent les côtez oppoſez à ces angles : ſçavoir, AD dans le premier & DC dans le ſecond ſont homologues ; ainſi on a la proportion BD. AD : : AD. DC ; donc la perpendiculaire AD eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties de la baſe. Il paroît donc par ce Théorême que chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle eſt moyen proportionnel entre l'hypotenuſe entiere & ſa partie correſpondante, & que la perpendiculaire eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypotenuſe coupée par cette perpendiculaire.

THEOREME VI.

66. *Lorſque deux figures ſont ſemblables, leurs contours ou perimetres ſont entr'eux comme les côtez homologues des figures.*

Fig. 31. Soient les deux figures *abcdefg* & ABCDEFG, que l'on ſuppoſe ſemblables. Je dis que le perimetre de la premiere eſt au perimetre de la ſeconde, comme le côté *ab* de la premiere eſt au côté homologue AB de la ſeconde.

DEMONSTRATION.

Ces deux figures étant ſuppoſées ſemblables, les côtez de l'une ſont proportionnels aux côtez homologues de l'autre (9.); c'eſt-à-dire, que *ab* . AB : : *bc* . BC : : *cd* . CD : : *de* . DE : : *ef* . EF : : *fg* . FG : : *ga* . GA. Voilà donc pluſieurs raiſons égales; par conſequent la ſomme des antécedens (Théorême IV. des Proportions.) eſt à la ſomme des conſéquens comme un ſeul antécedent eſt à ſon conſéquent. Or la ſomme des antécedens eſt le perimetre de la premiere figure; c'eſt-à-dire, tous ſes côtez pris enſemble, & la ſomme des conſéquens eſt auſſi le perimetre de la ſeconde figure; donc le perimetre de la premiere figure eſt au perimetre de la ſeconde, comme *ab* eſt à AB ou comme *bc* eſt à BC. Ce qu'il falloit démontrer.

67. On peut remarquer que dans deux figures ſemblables, les lignes correſpondantes, telles que *ad* & AD ſont proportionnelles aux côtez homologues *ab* & AB, ou *bc* & BC, ou *cd* & CD, &c. car ayant tiré les deux autres lignes correſpondantes *ac* & AC, on a deux triangles *abc* & ABC qui ſont ſemblables (55.), parce que les côtez *ab* & *bc* du premier ſont proportionnels aux côtez AB & BC du ſecond; & que d'ailleurs les angles *cba* & CBA ſont égaux. Or ces triangles étant ſemblables, il s'enſuit 1°. que *ac* . AC : : *ab* . AB, ou bien *ac*. AC : : *cd* . CD : : & *alternando*, *ac* . *cd* : : AC . CD.

2°. Que les deux angles *bca* & BCA ſont égaux; & par conſéquent les deux autres angles *dca* & DCA ſont auſſi égaux, à cauſe que l'angle total *bcd* eſt égal à l'angle total BCD; ainſi les deux triangles *acd* & ACD ſont ſemblables par la même raiſon que les deux premiers le ſont entr'eux; donc les côtez *ad* & AD ſont proportionnels aux côtez *cd* & CD, ou *ab* & AB. En continuant de la même maniere, on prouveroit que les deux côtez *ae* & AE ſont proportionnels aux côtez *de* & DE.

On peut ſe convaincre de la même choſe indépendamment des triangles ſemblables : car il eſt évident que ſi le côté *ab*, par exemple, eſt la moitié ou le tiers du côté homologue AB; il faut auſſi que la ligne *ad* ſoit la moitié ou le tiers de la ligne correſpondante AD, parce qu'autrement les figures ne ſeroient pas ſemblables : on peut donc aſſurer en général que dans deux figures ſemblables, les lignes correſpondantes ou ſemblablement tirées ſont proportionnelles aux côtez homologues.

68. Il ſuit de cette remarque que deux ou pluſieurs lignes telles que *ac*, *ad*, *ae*, &c. d'une figure ſont proportionnelles aux lignes correſpondantes AC, AD, AE, &c. d'une autre figure ſemblable : en ſorte que *ac*. AC :: *ad*. AD :: *ae*. AE. Cela eſt évident; car ſuivant la remarque, chacune de ces raiſons eſt égale à celle de *ab* à AB; ainſi elles ſont toutes égales entr'elles.

Nous avons démontré juſqu'ici quelques propriétez des polygones ſemblables : nous allons parler des polygones reguliers; mais avant il faut ſçavoir ce que c'eſt qu'un polygone *inſcrit* & un polygone *circonſcrit*.

69. Le polygone inſcrit eſt celui dont chaque angle a le ſommet dans la circonférence d'un cercle : ainſi le pentagone de la figure 35 eſt inſcrit dans le grand cercle dont le rayon eſt CA.

70. Le polygone circonſcrit eſt celui dont tous les côtez ſont des tangentes d'un cercle : ainſi le pentagone

de la Figure 35 est circonscrit au petit cercle dont le rayon est CG.

Remarquez que quand un polygone est inscrit à un cercle, ce cercle est appellé *circonscrit*; & lorsque le polygone est circonscrit, le cercle est appellé *inscrit*.

DES POLYGONES REGULIERS.

Une figure ou un polygone est regulier, comme on l'a déja dit, lorsque tous les angles & tous les côtez sont égaux.

71. Remarquez que les angles d'un polygone peuvent être égaux quoique les côtez ne le soient pas :
Fig. 32. Cela paroît par l'exagone ABGHEF, dont les angles sont égaux à ceux de l'exagone régulier ABCDEF. Réciproquement les côtez d'un polygone peuvent être égaux, quoique les angles ne le soient pas, comme
Fig. 33. on peut le voir par l'exagone ABGHLF, dont les côtez sont égaux à ceux de l'exagone régulier ABCDEF. Cette remarque est pareille à celle que nous avons faite (52.) sur les polygones semblables, & se demontre de la même maniere.

Il suit de-là qu'afin qu'on puisse dire qu'un polygone est régulier, il faut être assuré que non-seulement ses angles, mais aussi ses côtez sont égaux. Il en faut excepter le triangle, parce que nous avons fait voir (22.) que quand les trois angles d'un triangle sont égaux, les côtez le sont aussi; & de même lorsque les trois côtez d'un triangle sont égaux, les angles sont égaux, comme on l'a démontré.

Dans un polygone régulier on distingne deux sortes de rayons, l'*oblique* & le *droit*.

72. Le rayon oblique est une ligne tirée du centre du polygone à un des angles de la figure : telle est la ligne CA de la Figure 35.

73. Le rayon droit est une ligne tirée du centre per-

pendiculairement ſur un des côtez : telle eſt la ligne CG dans la Figure 35.

THEOREME I.

74. *Si dans un polygone régulier on tire du ſommet de deux angles voiſins, des lignes qui partagent chacun de ces angles en deux parties égales, ces lignes priſes du ſommet des angles juſqu'au point de rencontre ſont égales ; & toutes les autres lignes tirées de ce point aux angles du polygone ſont auſſi égales aux premieres.*

Soit le pentagone régulier ABCDE : ſi des deux angles voiſins A & B on tire les lignes AF & BF, qui partagent les angles A & B chacun en parties égales, & qui ſe rencontrent au point F ; je dis que les lignes AF & BF ſont égales, & que toutes les autres lignes tirées du point F aux angles de la figure, ſont auſſi égales à ces deux. Fig. 34.

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. L'angle total en A eſt égal à l'angle total en B, puiſque la figure eſt ſuppoſée réguliere : donc l'angle *h* qui eſt la moitié du premier eſt égal à l'angle *i* qui eſt la moitié du ſecond ; donc dans le triangle AFB les deux côtez FA & FB ſont égaux (22).

II. PARTIE. La ligne FC eſt égale à la ligne FB. Pour le démontrer il n'y a qu'à faire voir que le triangle BFC eſt égal en tout au premier triangle AFB : d'où l'on conclurra qu'il eſt iſocele auſſi-bien que ce premier triangle. Les côtez BA & BF du premier ſont égaux aux côtez BC & BF du ſecond : d'ailleurs par l'hypotheſe l'angle *i* compris entre les deux côtez du premier eſt égal à l'angle *k* compris entre les deux côtez du ſecond : donc les deux triangles ſont égaux en tout (29.) ; par conſéquent le côté FC eſt égal au côté FB.

On démontrera de la même maniere que le côté FD est égal au côté FC, en faisant voir que le triangle CFD est égal en tout au triangle BFC : ce qui sera facile, si on fait attention que dans le triangle isocele BFC, les angles *k* & *l* étant égaux, & le premier étant la moitié de l'angle total en B, il faut que le second soit aussi la moitié de l'angle total en C : d'où il suit que l'angle *m* est égal à l'angle *l*, puisqu'il doit être aussi la moitié de l'angle total en C.

COROLLAIRE I.

75. Le point F est appellé le centre, & les lignes tirées de ce point aux sommets des angles du polygone, sont les rayons obliques qui sont tous égaux entr'eux, comme on vient de le démontrer. De même les rayons droits, comme FG, sont aussi égaux entr'eux; puisque les triangles étant égaux en tout, leurs hauteurs qui sont les rayons droits sont égales.

COROLLAIRE II.

76. On peut toûjours circonscrire un cercle à un polygone régulier donné : car le centre du polygone étant également éloigné de chacun des angles, si de ce centre & de l'intervalle d'un rayon oblique, comme CA, on décrit une circonférence, elle passera par tous les sommets des angles; par conséquent le cercle sera circonscrit au polygone.

Fig. 35.

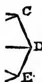
COROLLAIRE III.

77. On peut toûjours inscrire un cercle à un polygone régulier donné : car tous les rayons droits étant égaux, si du centre du polygone & de l'intervalle d'un rayon droit, comme CG, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtez du polygone, sans passer au-delà; par conséquent le cercle sera inscrit.











Digitized by Google

78. Il ſuit du ſecond & du troiſiéme Corollaire qu'on peut toûjours ſuppoſer qu'un polygone régulier eſt inſcrit ou circonſcrit à un cercle.

79. Remarquez que le rayon droit d'un polygone régulier coupe le côté du polygone en deux parties égales : car ce polygone peut être inſcrit à un cercle, comme on vient de le dire ; par conſéquent chaque côté peut être conſideré comme une corde. Or nous avons démontré (Liv. I. Art. 103.) que quand une ligne paſſe par le centre, & qu'elle eſt perpendiculaire à la corde, elle coupe cette corde en deux parties égales ; ainſi le rayon droit ayant ces deux conditions, il coupe le côté du polygone en deux parties égales.

80. Remarquez auſſi que le rayon oblique d'un polygone régulier partage l'angle à la circonférence en deux parties égales : par exemple, le rayon FA partage l'angle EAB en deux autres angles égaux ; ſçavoir, FAE & FAB. Cela paroît par la démonſtration du Théorême. Fig. 34.

81. Il paroît évidemment par la Fig. 36 que deux polygones réguliers étant inſcrits à un même cercle ou à des cercles égaux, ſi l'un a le double des côtez de l'autre, il aura un plus grand perimetre : par exemple, l'octogone a un plus grand perimetre que le quarré : puiſque les deux côtez AB & BD de l'octogone pris enſemble ſont plus grands que le côté AD du quarré. Mais quoique le nombre des côtez d'un polygone ne ſoit pas double du nombre des côtez d'un autre (on les ſuppoſe tous deux reguliers & inſcrits au même cercle ou à des cercles égaux ;) cependant le perimetre du polygone qui a le plus de côtez eſt plus grand que celui qui en a moins ; par exemple, le perimetre du pentagone eſt plus grand que celui du quarré : car la circonférence du cercle étant plus grande que le perimetre d'aucun polygone qui lui eſt inſcrit ; il eſt certain que plus le perimetre d'un polygone inſcrit approche de la Fig. 36.

circonférence, plus le perimetre eſt grand. Or le perimetre du pentagone eſt plus près de la circonférence que celui du quarré, puiſque les côtez du pentagone ſont des cordes plus petites que les côtez du quarré ; donc le perimetre du pentagone eſt plus grand que celui du quarré.

82. Au contraire de tous les polygones réguliers circonſcrits au même cercle ou à des cercles égaux, celui qui a le plus de côtez a le moindre perimetre. Cela eſt évident, lorſqu'un des polygones a le double des côtez de l'autre, comme dans la Fig. 37 ; car dans l'octogone le côté AD eſt plus petit que la partie correſpondante ABD du perimetre du quarré. Mais on peut démontrer la propoſition généralement en cette maniere : la circonférence d'un cercle eſt plus petite que le perimetre d'aucun polygone circonſcrit ; par conſéquent plus le perimetre circonſcrit s'approche de la circonférence, plus ce perimetre eſt petit. Or le perimetre s'approche d'autant plus de la circonférence, que le polygone a plus de côtez, parce que ces côtez étant des tangentes, ils s'écartent d'autant moins qu'ils ſont plus petits ; donc plus un polygone circonſcrit a de côtez, plus ſon perimetre eſt petit.

83. Il ſuit de-là que ſi un polygone régulier, ſoit inſcrit, ſoit circonſcrit avoit une infinité de côtez, ſon perimetre s'approcheroit infiniment de la circonférence & ſe confondroit avec elle ; il pourroit donc être pris pour la circonférence même : c'eſt pourquoi on peut regarder le cercle, comme un polygone régulier d'une infinité de côtez.

THEORÊME II.

84. *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtez ſont ſemblables.*

DEMONSTRATION.

DEMONSTRATION.

Soient, par exemple, deux pentagones reguliers; je dis qu'ils sont semblables : car 1°. Les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre (50). 2°. Les côtez de l'un sont proportionnels aux côtez de l'autre; c'est-à-dire, AB . *ab* : : BD . *bd* : : DE . *de* : : EF . *ef* : : FA . *fa*, parce que les côtez du premier pentagone étant égaux entr'eux, & ceux du second étant aussi égaux entr'eux, si un des côtez du premier est le double ou le triple &c. d'un des côtez du second, les autres côtez du premier sont aussi doubles ou triples, &c. des autres côtez du second; par conséquent les deux pentagones réguliers sont des figures semblables. Fig. 38.

Comme les polygones réguliers d'un même nombre de côtez sont toûjours semblables, au lieu de dire, les polygones réguliers d'un même nombre de côtez, on dit souvent, *les polygones réguliers semblables.*

COROLLAIRE.

85. Puisqu'on a démontré (66.) que dans toutes les figures semblables les perimetres sont proportionnels aux côtez homologues, il s'ensuit que cette proprieté convient aussi aux polygones réguliers semblables; par exemple, à deux pentagones réguliers.

THEOREME III.

86. *Dans les figures régulieres semblables, par exemple, dans deux pantagones reguliers, les perimetres sont entre eux comme les rayons obliques, ou comme les rayons droits.*

Il faut démontrer que le perimetre du premier pentagone est au perimetre du second, comme le rayon oblique CD est au rayon oblique *cd*, ou comme le rayon droit CG est au rayon droit *cg*. Fig. 38.

DEMONSTRATION.

Les deux triangles CGD & *cgd* sont semblables;

car l'angle G de l'un eſt égal à l'angle *g* de l'autre, parce qu'ils ſont tous les deux droits. De plus les angles CDG & *cdg* ſont auſſi égaux, parce qu'ils ſont chacun moitié d'angles égaux; ſçavoir des angles BDE & *bde*, qui ſont partagez chacun en deux parties égales par les rayons obliques (80.); donc les deux triangles ſont ſemblables; par conſéquent les côtez homologues ſont proportionnels; c'eſt-à-dire, que la raiſon des rayons droits CG & *cg* eſt égale à celle de GD à *gd*. Or les rayons droits coupent les côtez ED & *ed* des polygones réguliers en parties égales (79.); par conſéquent GD & *gd* ſont les moitiez des côtez ED & *ed*; donc la raiſon des moitiez GD & *gd* eſt égale à celle des côtez ED & *ed*. D'ailleurs par le Corollaire précedent la raiſon des côtez eſt égale à celle des perimetres. Voilà donc quatre raiſons égales; ſçavoir, celle des rayons droits, celle des moitiez GD & *gd*, celle des côtez & celle des perimetres: donc la premiere eſt égale à la quatriéme, c'eſt-à-dire, que les rayons droits ſont entr'eux comme les perimetres, ou les perimetres ſont entr'eux comme les rayons droits. Mais la raiſon des rayons obliques eſt égale à celle des rayons droits, à cauſe des triangles ſemblables CDG & *cdg*; par conſéquent les perimetres ſont auſſi entr'eux comme les rayons obliques.

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

87. Les circonférences ſont entr'elles comme les rayons. On vient de démontrer que dans les figures régulieres ſemblables, les perimetres ſont entr'eux comme les rayons droits ou obliques. Or les cercles peuvent être conſiderez comme des polygones reguliers d'une infinité de côtez (83.); par conſéquent leurs perimetres, c'eſt-à-dire, leurs circonférences ſont entr'elles comme les rayons.

88. Il faut remarquer que la différence du rayon

droit au rayon oblique est d'autant moindre que les côtez du polygone sont petits : c'est pourquoi le cercle pouvant être consideré comme un polygone d'une infinité de côtez infiniment petits, la difference entre le rayon droit & le rayon oblique, doit être infiniment petite ; & peut être considerée comme nulle.

89. Les rayons étant entr'eux comme les circonférences ; ils sont aussi entr'eux comme les demi-circonférences, comme les quarts, & généralement comme les arcs semblables ; c'est à-dire, d'un même nombre de degrez ; ensorte, par exemple, que si on a deux cercles, le rayon de l'un est au rayon de l'autre, comme un arc de 30 degrez du premier cercle est à un arc de 30 degrez du second.

90. Les rayons étant moitié des diametres, la raison des diametres de deux cercles est égale à celle des rayons ; & ainsi dans deux cercles, les diametres sont entr'eux comme les circonférences, & encore comme les arcs semblables : par exemple, si le diametre d'un cercle est double du diametre d'un autre cercle, la circonférence du premier est double de celle du second.

COROLLAIRE II.

91. Dans deux cercles, les cordes qui soûtiennent des arcs semblables, sont entr'elles comme ces arcs. Fig. 39.

Soient les deux cordes AB & *ab* qui soûtiennent les deux arcs semblables AEB & *aeb* ; je dis que les deux cordes sont entr'elles comme les arcs ; car ayant tiré les deux rayons CA & CB aux extrêmitez de la premiere corde, & les deux autres rayons *ca* & *cb* aux extrêmitez de la seconde corde, on a deux triangles isoceles qui sont semblables (54.), puisque l'angle C & l'angle *c* sont appuyez sur des arcs semblables, & sont par conséquent égaux ; donc les côtez homologues de ces triangles sont proportionnels ; ainsi la raison qui est entre les cordes AB & *ab* est égale à celle qui est entre les rayons

CA & *ca*. Or la raiſon qui eſt entre ces rayons eſt égale à celle des arcs ſemblables AEB & *aeb*. Donc la raiſon des cordes eſt égale à celle des arcs ſemblables qu'elles ſoûtiennent.

Comme nous allons parler des ſinus, des tangentes, & des ſécantes d'arcs de cercles; il eſt néceſſaire d'en donner la notion.

92. Une ligne, comme AD, tirée d'une extrêmité de l'arc AE perpendiculairement ſur le rayon CE qui paſſe par l'autre extrêmité de cet arc, eſt appellée *ſinus* de l'arc AE, & de l'angle ACE dont l'arc AE eſt la meſure. Pareillement la ligne *ad* perpendiculaire ſur le rayon *ce* eſt le ſinus de l'arc *ae* & de l'angle *ace*.

93. Une ligne, comme AF, tirée perpendiculairement de l'extrêmité du rayon CA, & terminée de l'autre côté par le rayon prolongé CEF, eſt appellée *tangente* de l'arc AE compris entre ces deux rayons. De même *af* eſt la tangente de l'arc *ae*.

94. Le rayon prolongé CEF eſt appellé *ſécante* du même arc. Pareillement dans l'autre figure, *cef* eſt la ſécante de l'arc *ae*.

COROLLAIRE III.

95. Dans deux cercles, les ſinus d'arcs ſemblables ſont entr'eux comme ces arcs.

Soient les deux arcs ſemblables AE & *ae* dont les ſinus ſont AD & *ad*; je dis que ces ſinus ſont entr'eux comme leurs arcs: car dans les deux triangles CDA & *cda*, l'angle D du premier eſt égal à l'angle *d* du ſecond, puiſque les ſinus ſont perpendiculaires aux rayons CE & *ce*. D'ailleurs l'angle ACE eſt auſſi egal à l'angle *ace*, parce qu'ils ont pour meſures les arcs AE & *ae*, qui ſont ſemblables par la ſupoſition; par conſéquent les deux triangles ſont ſemblables; donc les côtez homologues ſont proportionnels; ainſi AD . *ad* :: CA . *ca*. Or les arcs ſemblables ſont entr'eux comme les rayons

(89.); donc AE . *ae* : : CA . *ca*; par conséquent AD . *ad* : : AE . *ae*.

COROLLAIRE IV.

96. Dans deux cercles, les tangentes d'arcs semblables sont entr'elles comme ces arcs.

Soient les deux arcs semblables AE & *ae*, dont les tangentes sont AF & *af*; je dis que ces tangentes sont entr'elles comme leurs arcs : car il est clair que les deux triangles rectangles CAF & *caf* sont semblables : d'où l'on conclura, comme dans le Corollaire précedent, que AF . *af* : : AE . *ae*.

COROLLAIRE V.

97. Dans deux cercles, les sécantes d'arcs semblables sont entr'elles comme ces arcs.

Les lignes CEF & *cef* sont des sécantes des arcs semblables AE & *ae* : je dis qu'elles sont entr'elles comme ces arcs; ce qui se prouve de la même maniere que le Corollaire précedent.

98. On voit par les cinq Corollaires précedens, que dans deux cercles où l'on a tiré des diametres, des rayons, des cordes, des sinus, des tangentes, & des sécantes d'arcs semblables; on a plusieurs raisons égales, sçavoir la raison des diametres, celle des rayons, celle des circonférences, celle des arcs semblables, celle des cordes, celle des sinus, celle des tangentes, & celle des sécantes; toutes ces raisons, dis-je, sont égales entr'elles.

99. Il faut remarquer que dans un même cercle les différentes cordes ne sont pas entr'elles comme les arcs qu'elles soûtiennent : par exemple, quoique l'arc AEB soit double de l'arc AE; cependant la corde AB n'est pas double de la corde AE, puisque la corde AB n'est pas si grande que les deux cordes égales AE & BE prises

ensemble. Les sinus des différens arcs ne sont pas non plus entr'eux comme ces arcs. Il en est de même de leurs tangentes & de leurs sécantes.

THEORÊME IV.

100. *Le côté de l'exagone régulier inscrit dans un cercle, est égal au rayon du cercle.*

DE'MONSTRATION.

Fig. 40. Du centre C, soient tirez les rayons CA & CB sur les extrêmitez du côté AB de l'exagone : je dis que ce côté est égal au rayon; car dans le triangle ACB, l'angle C a pour sa mesure l'arc AB, qui est de 60 degrez, puisqu'il est la sixiéme partie de la circonférence : donc les deux autres angles A & B pris ensemble valent 120 degrez. Or ces deux angles sont égaux, parce qu'ils sont opposez à des côtez égaux, sçavoir, aux rayons CA & CB : donc chacun de ces angles est de 60 degrez; donc les trois angles du triangle ACB sont égaux; donc les côtez sont aussi égaux ; par conséquent le côté AB de l'exagone est égal au rayon. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

101. De-là il suit, que le perimetre de l'exagone régulier inscrit dans un cercle, contient six fois, ou est six fois plus grand que le rayon du cercle ; & par conséquent ce perimetre est trois fois plus grand que le diametre. Or la circonférence du cercle est plus grande que le perimetre de l'exagone inscrit ; ainsi la circonférence du cercle est plus de trois fois plus grande que son diametre, c'est-à-dire, que le rapport de la circonférence au diametre est plus grand que celui de 3 à 1, ou de 21 à 7. Archimede a prouvé qu'il est encore un peu plus grand que la raison de $21 \frac{70}{71}$ à 7, qui est

la même que celle de 223 à 71 : mais il a aussi fait voir que ce rapport de la circonférence au diametre est moindre que la raison de 22 à 7 : & Metius a démontré depuis, qu'il est même plus petit que la raison de 355 à 113, laquelle est égale à celle de $21\frac{112}{113}$ à 7 : il est cependant plus grand que celle de $21\frac{111}{112}$ à 7 : ainsi le rapport exact de la circonférence au diametre, que plusieurs grands Géometres ont cherché inutilement, est entre ces deux raisons, sçavoir, celle de $21\frac{112}{113}$ à 7 ou de 355 à 113, & celle de $21\frac{111}{112}$ à 7, qui sont des limites fort étroites ; il est moindre que la premiere, & plus grand que la seconde. Tout cela est prouvé dans un supplément qui est à la fin de l'ouvrage dont nous donnons l'abregé.

Si on veut sçavoir la différence des deux fractions $\frac{112}{113}$ & $\frac{111}{112}$, il faut les réduire au même dénominateur, & on trouvera les deux suivantes $\frac{12544}{12656}$ & $\frac{12543}{12656}$, qui ne different entr'elles que de $\frac{1}{12656}$, c'est-à-dire, de la 12656[me] partie de l'unité ; par conséquent les deux nombres $21\frac{112}{113}$ & $21\frac{111}{112}$ ne different aussi que de la même quantité.

102. De ce que les rapports de 22 à 7 & de 355 à 113 sont plus grands l'un & l'autre que la raison de la circonférence au diametre, il suit que les rapports renversez, c'est-à-dire, ceux de 7 à 22 & de 113 à 355, sont chacun plus petits que la raison du diametre à la circonférence, parce que les conséquens 22 & 355 étant trop grands, ils rendent les rapports trop petits.

Dans l'usage on suppose ordinairement que le rapport de 7 à 22 est égal à celui du diametre à la circonférence, & si on veut encore avoir un rapport plus approchant du véritable, on prend celui de 113 à 355, qui est égal à celui de 7 à $21\frac{112}{113}$, puisque si on arrange les termes de ces deux rapports en proportion, & qu'on

multiplie les extrêmes l'un par l'autre, & les moyens de même, on trouvera que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. On peut prendre aussi le rapport de 106 à 333 qui est plus grand que celui du diametre à la circonférence, & que ceux de 7 à 22 & de 113 à 355. Il approche plus du rapport qui est entre le diametre & la circonférence que celui de 7 à 22, & un peu moins que celui de 113 à 355. Ce rapport de 106 à 333 est égal à celui de 7 à 21 $\frac{105}{106}$, comme il paroît, parce que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

THEOREME V.

103. *Il n'y a que trois sortes de polygones rreguliers dont les angles puissent remplir exactement l'espace qui est autour d'un point, comme* C, (Figure 41.) *sçavoir, six triangles équilateraux, quatre quarrez, & trois exagones réguliers.*

DEMONSTRATION.

1°. Six angles de triangles équilateraux ou réguliers peuvent remplir l'espace autour d'un point: car tous les angles qu'on peut faire autour d'un point valent ensemble quatre angles droits, puisqu'ils ont pour mesure la circonférence dont ce point est le centre. Or six angles de triangles équilateraux valent quatre angles droits, puisque chacun vaut le tiers de deux angles droits, c'est-à-dire 60 degrez. Par conséquent en mettant six triangles réguliers autour d'un point, de maniere que ce point soit le sommet commun d'un angle de chaque triangle, tout l'espace autour du point sera exactement rempli.

2°. Quatre angles de quarrez remplissent aussi tout l'espace autour d'un point, parce que chacun de ces angles est droit; & par conséquent les quatre valent quatre angles droits.

3°. Trois angles d'éxagones réguliers peuvent auſſi remplir l'eſpace autour d'un point : car chacun des angles de l'éxagone régulier vaut 120 degrez : ainſi la ſomme des trois angles vaut 360 degrez ou quatre angles droits.

Pour ce qui eſt des angles des pentagones réguliers, ils ne peuvent remplir tout l'eſpace qui eſt autour d'un point : car chacun des angles du pentagone régulier eſt de 108 degrez : donc ſi on prend trois de ces angles, ils feront moins de 360 degrez ; & ſi on en prend quatre ou davantage, ils feront plus de 360 degrez.

Enfin les figures régulieres qui ont plus de côtez que l'éxagone, ne peuvent par leurs angles remplir exactement l'eſpace autour d'un point : car plus les polygones réguliers ont de côtez, plus les angles compris entre ces côtez ſont grands. Or chacun des angles de l'éxagone régulier vaut 120 degrez ; par conſéquent l'angle de l'eptagone régulier, par exemple, vaut plus de 120 degrez : donc trois de ces angles pris enſemble valent plus de 360 degrez. Il en eſt de même des autres polygones réguliers qui ont plus de ſix côtez.

Il paroît par ce Théorême, dont la découverte eſt attribuée à un ancien Géometre appellé Proclus*, que l'on ne peut employer pour carreler une ſalle, une chambre, &c. que trois ſortes de carreaux réguliers, ſçavoir, ceux de trois côtez, ceux de quatre & ceux de ſix : ces derniers ſont plus d'uſage, parce que leurs angles étant plus grands, ils ſont moins ſujets à ſe caſſer. Par la raiſon contraire on ne ſe ſert gueres de carreaux triangulaires, c'eſt-à-dire, de trois côtez.

PROBLEME I.

104. *Trouver la valeur de l'angle au centre, & celle de l'angle à la circonférence d'un polygone régulier, par exemple, d'un pentagone.*

1°. Pour l'angle au centre, diviſez la circonférence, Fig. 41.

c'est-à dire, 360 degrez, par le nombre des côtez du polygone, & le quotient sera la mesure de l'angle au centre : ainsi pour avoir la valeur de l'angle au centre du pentagone, il faut diviser 360 par 5, & le quotient 72 marquera que l'angle ACB est de 72 degrez. Cela est évident, puisque l'angle au centre d'un pentagone a pour mesure la cinquiéme partie de la circonférence du cercle dans lequel il peut être inscrit.

2°. L'angle de la circonférence, comme ABD, peut être facilement connu après avoir trouvé la valeur de l'angle au centre : car dans le triangle ACB, l'angle au centre plus les deux angles sur le côté AB, c'est-à-dire, les trois angles du triangle sont égaux à deux angles droits. Or l'angle ABD est égal aux deux angles sur le côté AB pris ensemble, puisque chacun de ces deux, n'est que la moitié de l'angle à la circonférence (80.) : donc l'angle au centre & l'angle à la circonférence joints ensemble, valent deux angles droits ; & par conséquent si de 180 degrez, qui sont la mesure de deux angles droits, on ôte la valeur de l'angle au centre, le reste sera la valeur de l'angle à la circonférence : par exemple, l'angle à la circonférence du pentagone est de 108, parce qu'en ôtant de 180 la valeur de l'angle au centre, qui est de 72 degrez, le reste est 108.

Il paroît par ce problême que l'angle au centre d'un polygone régulier est d'autant plus petit, & que l'angle à la circonférence est d'autant plus grand que le polygone a plus de côtez.

PROBLEME II.

Fig. 43. 105. *Inscrire un quarré régulier dans un cercle donné.*

Coupez la circonférence en quatre parties égales, par deux diametres perpendiculaires, & tirez ensuite des cordes aux extrêmitez des diametres, vous aurez le quarré inscrit. Car en premier lieu il est évident que les quatre cordes sont égales, puisque les diametres

perpendiculaires coupent la circonférence en quatre parties égales : voilà donc déja les quatre côtez égaux. D'ailleurs ces côtez forment des angles droits : par exemple, l'angle BAC est droit, puisque c'est un angle inscrit appuyé sur le diametre : par conséquent le quadrilatere formé par les cordes est un quarré.

PROBLEME III.

106. *Inscrire un exagone régulier dans un cercle.*

Prenez la longueur du rayon, que vous porterez six fois sur la circonférence ; ensuite tirez des cordes aux points de division ; vous aurez l'exagone cherché. Cela suit clairement du quatriéme Théorême. Fig. 44.

PROBLEME IV.

107. *Une figure réguliere étant inscrite, en inscrire une autre qui n'ait que la moitié du nombre des côtez.*

Tirez des cordes dont chacune soûtienne un arc double de celui qui est soutenu par chaque côté du polygone inscrit : par exemple, ayant un exagone régulier inscrit, si on veut inscrire un triangle régulier, il faut tirer les cordes AC, CE & EA, dont chacune soûtient un arc double de celui qui est soûtenu par chaque côté de l'exagone. Fig. 44.

PROBLEME. V.

108. *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, en inscrire un autre qui ait le double des côtez.*

Divisez en deux parties égales chacun des arcs soûtenus par le côté du polygone inscrit ; tirez ensuite des deux extrêmitez de chaque côté, des cordes au point de division, & vous aurez le polygone cherché : par exemple, le triangle équilateral ACE étant inscrit, si on veut inscrire un exagone, il faut diviser les arcs AC, CE, EA, chacun en deux parties égales, & tirer les cordes AB, BC, CD, DE, EF, FA ; on aura l'exagone régulier ABCDEF.

109. Il est évident par les deux derniers Problêmes, que lorsqu'on sçait inscrire un poligone régulier, on en peut aussi inscrire deux autres, dont l'un n'ait que la moitié des côtez du premier, & l'autre le double : sur quoi il faut remarquer que dans la pratique il n'est pas nécessaire d'inscrire un polygone pour en inscrire un autre qui ait la moitié ou le double du nombre des côtez : par exemple, pour inscrire un triangle ou un dodécagone, il faut seulement marquer les six points de division, desquels il faudroit tirer les côtez de l'exagone.

PROBLEME VI.

110. *Circonscrire un polygone régulier à un cercle.*

Fig. 45. Il faut d'abord inscrire un polygone régulier semblable : ensuite tirer trois rayons, comme M*o*, M*b*, M*c*, dont le premier soit perpendiculaire à un côté du polygone inscrit, & les deux autres passent par les extremitez de ce côté : après cela tirez par le point *o* la tangente BC terminée par les deux rayons M*b*, M*c* prolongez. Je dis que si du centre M, & de l'intervalle MB ou MC on décrit une circonférence, & que l'on tire des cordes égales à la tangente, comme AB, CD &c. elles seront tangentes elles-mêmes du cercle donné, & formeront un polygone circonscrit. Il est évident que les cordes égales à la tangente BC seront autant éloignées du centre que BC, & par conséquent elles seront aussi tangentes par rapport à la petite circonférence.

PROBLEME VII.

111. *Faire un polygone régulier, par exemple, un exagone, dont chaque côté soit égal à la ligne donnée* L.

Fig. 70. Tirez la ligne AB égale à la ligne donnée, & après avoir cherché quel doit être l'angle à la circonférence de ce polygone (Article 104.) menez des deux extrêmitez A & B les lignes AC & BC qui fassent les deux angles BAC & ABC égaux chacun à la moitié de l'angle à

la circonférence; ensuite du point C & de l'intervalle CA ou CB décrivez une circonférence dont la ligne AB sera une corde : prenez avec le compas la longueur de cette ligne & appliquez une des pointes du compas sur l'extrêmité A ou B, pour marquer successivement les autres points de la circonférence ausquels il faut tirer les cordes égales au côté AB : enfin menez ces cordes, vous aurez le polygone régulier cherché. La raison de cette pratique paroîtra évidente, si on fait attention que les rayons obliques CA & CB doivent couper les angles à la circonférence en deux également. (*Art.* 80.)

Ce Problême renferme cet autre : un polygone régulier étant donné, en faire un autre semblable dont le côté soit donné : car pour que deux polygones réguliers soient semblables, il suffit qu'ils aient le même nombre de côtez. (*Art.* 84.)

Pour faire les deux angles BAC & ABC égaux chacun à la moitié de l'angle à la circonférence, il faut se servir d'un instrument qu'on appelle *rapporteur*, différent du compas & de la regle : c'est pourquoi cette méthode est méchanique, & non pas géométrique : cependant elle est fort utile dans la pratique, parce qu'elle est facile à exécuter, & que d'ailleurs elle est générale.

Il y a des méthodes géométriques pour faire quelques-uns des polygones réguliers sur un côté donné : mais celle que nous venons d'expliquer dans ce Problême suffit, quoiqu'elle ne soit que méchanique. Au reste la description géométrique du triangle régulier s'entend clairement par ce que nous avons dit, (Art. 38.), en expliquant le Problême où il s'agit de faire un triangle qui ait ses trois côtez égaux à trois lignes données. Celle du quarré a été expliquée (Art. 45 & 46.) Enfin celle de l'exagone régulier suit évidemment de l'art. 100 : car ayant le côté AB de l'éxagone, décrivez une circonférence dont le rayon soit égal au côté AB, & tirez des cordes égales à AB, vous aurez l'éxagone proposé.

On n'a point encore trouvé de méthode géometrique de faire des polygones réguliers de 7 côtez, de 9, de 11, de 13, de 14, de 17, &c.

PROBLÊME VIII.

112. *Trouver la circonférence d'un cercle dont on connoît le diametre.*

Soit un cercle dont le diametre ait 800 pieds. Afin de trouver la circonférence, il faut se servir du rapport d'Archimede, qui est de 7 à 22, & faire une regle de trois, dont le premier terme soit 7, le second 22, & le troisiéme 800; le quatriéme sera la circonférence. On trouvera ce quatriéme terme à l'ordinaire en multipliant les deux moyens 22 & 800 l'un par l'autre, & divisant le produit 17600 par 7, qui est le premier terme; le quotient $2514 \frac{2}{7}$ fait voir que si le diametre d'un cercle est de 800 pieds, la circonférence est d'environ 2514 pieds & $\frac{2}{7}$ d'un pied.

Le rapport de 22 à 7 est égal à celui de $3 \frac{1}{7}$ à 1, c'est-à-dire, que 22 contient trois fois 7 & de plus 1, qui est la septiéme partie de 7: c'est pourquoi on trouveroit un nombre égal au quatriéme terme cherché, en multipliant le diametre 800 par 3, & en ajoûtant ensuite au produit la septiéme de 800: ce qui est plus facile que de trouver le quatriéme terme de la proportion marqué ci-dessus par la regle de trois.

Si on veut avoir un nombre qui approche un peu plus de la véritable circonférence que $2514 \frac{2}{7}$, il faut se servir du rapport de 113 à 355, & faire la proportion $113 . 355 :: 800 . x$: on trouvera qu'après avoir multiplié les deux moyens, & divisé le produit par le premier terme, le quotient sera $2513 \frac{31}{113}$. Ainsi la circonférence est environ 2513 pieds & $\frac{31}{113}$ d'un pied.

113. Remarquez que la circonférence cherchée est

un peu moindre que l'un & l'autre des deux quotiens, parce que la circonférence dont le diametre est 7, est plus petite que 22, & pareillement la circonférence dont le diametre est supposé de 113, est plus petite que 355 : car, comme nous avons dit (102), les conséquens des deux rapports de 7 à 22 & de 113 à 355 sont un peu trop grands. En se servant du rapport de 7 à 22, le quotient qu'on trouve n'excede pas de sa 2485me partie la véritable circonférence qu'on cherche, & cependant il surpasse plus que de sa 2486me partie cette circonférence ; mais si on se sert du rapport de 113 à 355, l'excès du quotient ou du nombre trouvé sur la circonférence qu'on cherche est plus petit que la 11776666me partie de ce quotient, quoique cet excès soit plus grand que la 11776667me partie du quotient.

114. On peut conclurre de-là que si en cherchant la circonférence d'un cercle par le rapport de 7 à 22, le nombre trouvé est égal ou plus grand que 2486, il surpassera la circonférence au moins d'une unité : si ce nombre trouvé étoit deux fois plus grand que 2486, il excederoit la circonférence au moins de deux unitez, &c. De même si le nombre trouvé étoit la moitié de 2486, il surpasseroit la circonférence au moins de la moitié d'une unité. Ainsi dans l'exemple qu'on vient d'employer, le nombre trouvé par le rapport de 7 à 22 étant de $2514\frac{2}{7}$, on en peut retrancher 1 & on est assuré que le reste $2513\frac{2}{7}$ est encore plus grand que la véritable circonférence. En général il faut diviser le nombre trouvé par 2486, & ôter ensuite le quotient de ce nombre trouvé, le reste sera encore un peu plus grand que la circonférence cherchée : mais si on divise le nombre trouvé par 2485, & qu'on retranche le quotient du même nombre trouvé, le reste sera moindre que la circonférence cherchée. On peut dire la même

chose lorſqu'on ſe ſert du rapport de 113 à 355 en ſubſtituant néanmoins 11776667 à la place de 2486, & 11776666 à celle de 2485.

Si on ſe ſert du rapport de 106 à 333 qui eſt très-commode dans la pratique, le quotient qu'on trouvera ſera plus petit que la circonférence cherchée, parce que la circonférence dont le diametre eſt 106 eſt plus grande que 333. Mais l'excès de la circonférence cherchée ſur le quotient trouvé ne ſera pas la 37749me partie de ce quotient, & cependant cet excès eſt plus grand que la 37750me partie du quotient. On trouvera la preuve de tout ce que nous venons de dire ſur cette matiere dans le ſupplément qui eſt à la fin de l'ouvrage dont celui-ci eſt un abregé.

DES FIGURES PLANES conſiderées ſelon leur ſurface.

Après avoir parlé des côtez qui terminent les figures, & des angles formez par ces côtez, il faut à préſent conſiderer l'eſpace qui y eſt renfermé. Cet eſpace eſt une ſurface ou ſuperficie, on le nomme auſſi *aire*.

Nous avons dit qu'il y avoit trois ſortes de ſurfaces; les planes, comme celle des miroirs ordinaires; les courbes comme celle des globes, & les mixtes, qui ſont en partie planes & en partie courbes.

Nous avons encore diſtingué trois ſortes de ſuperficies planes; les rectilignes, comme un pentagone; les curvilignes, comme les cercles; & les mixtilignes, comme les ſegmens & les ſecteurs du cercle.

Nous traiterons 1°. Des élemens & de l'égalité des ſurfaces. 2°. De la meſure des ſurfaces. 3°. Du rapport des ſurfaces.

DES

DES ELEMENS ET DE L'EGALITE' des ſurfaces.

Comme la ligne eſt compoſée de points, de même la ſurface eſt compoſée de lignes poſées les unes à côté des autres : ainſi les élemens des ſurfaces ſont des lignes. Or on ne peut concevoir que des lignes conſiderées ſans largeur compoſent une ſurface ; c'eſt pourquoi il faut conſiderer les lignes comme ayant une largeur infiniment petite qui ſoit la même dans chacune des lignes qui ſervent d'élémens à une ſuperficie.

115. Les élemens d'un parallelogramme ſont donc une infinité de lignes paralleles & égales à la baſe, leſquelles rempliſſent l'eſpace compris dans le parallelogramme. De même les élémens d'un triangle ſont une infinité de lignes paralleles à la baſe, qui ſont d'autant plus courtes qu'elles ſont plus éloignées de la baſe. Les élemens du cercle ſont une infinité de circonférences concentriques : ainſi des autres figures. Fig. 46. Fig. 47.

116. On prend auſſi pour élemens des figures, des ſurfaces infiniment petites, dont la ſomme remplit la figure : par exemple, on peut dire que les élémens d'un parallelogramme, ſont une infinité de petits parallelogrammes qui ont même baſe que le parallelogramme total, & qui ont une hauteur infiniment petite. Pareillement on peut prendre pour élémens d'un triangle une infinité de triangles qui ont même hauteur que le triangle total ; & qui ont chacun pour baſe une partie infiniment petite de la baſe de ce triangle. On peut auſſi prendre pour élémens d'un cercle, des triangles infiniment petits, dont le ſommet ſoit au centre, & qui aient pour baſe chacun une partie infiniment petite de la circonférence. On peut dire la même choſe des ſecteurs de cercle, comme celui de la Figure 49. Fig. 48.

117. Il eſt évident que deux figures ou ſuperficies ſont égales lorſque les élémens de l'une ſont égaux aux

élémens de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans les deux superficies.

118. Nous nous servirons dans nos démonstrations des premiers élémens, c'est-à-dire, des lignes que l'on regarde comme ayant une largeur infiniment petite. Or le nombre de ces élémens se mesure dans les parallelogrammes & dans les triangles par des perpendiculaires à la base, qui sont les hauteurs; en sorte que si la hauteur d'un parallelogramme est double de celle d'un autre, le nombre des élémens du premier est double du nombre des élémens du second; si la hauteur est triple, le nombre des élémens est triple, &c.

119. Dans le cercle le nombre des circonférences concentriques qui en sont les élémens, est mesuré par le rayon, parce que le cercle étant rempli de circonférences, il est clair que le nombre des circonférences est égal au nombre des points du rayon.

On appelle ces élémens *indivisibles*, parce que n'ayant qu'une largeur infiniment petite, on les regarde comme indivisibles selon leur largeur.

Après avoir donné ces notions touchant les élémens des surfaces, il faut maintenant parler de leur égalité.

120. Deux figures planes sont appellées *égales*, lorsque la surface de l'une est égale à la surface de l'autre, quoique les côtez de la premiere ne soient pas égaux à ceux de la seconde: par exemple, afin que deux triangles soient appellez égaux, il suffit qu'ils aient des surfaces égales; & même un triangle est dit égal à un parallelogramme, lorsqu'il contient autant d'espace ou de surface que le parallelogramme: mais lorsque deux figures ont des surfaces égales, & que les côtez & les angles de l'une sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, pour lors on dit qu'elles sont égales en tout. Dans le premier cas, on dit souvent que les figures sont égales en surface; mais cela n'est pas nécessaire, il suffit de dire qu'elles sont égales: ce qui signifie la même

chose qu'en disant qu'elles sont égales en surface.

121. Il paroît par-là & par l'article 9 qu'il y a une grande différence entre des figures égales & des figures semblables.

122. Deux rectangles de même base & de même hauteur sont égaux en tout. Cette proposition peut passer pour un axiome : car si on conçoit que l'on applique ces deux rectangles l'un sur l'autre, la base sur la base, & le côté sur le côté, on voit aisément que ces deux rectangles conviendront parfaitement, & par conséquent ils sont égaux en tout. Mais si on compare un rectangle avec un parallelogramme de même base & de même hauteur, on n'apperçoit pas si facilement si les surfaces sont égales. Nous allons démontrer l'égalité de ces deux figures dans le Théorême suivant.

THEOREME PREMIER ET FONDAMENTAL.

123. *Un rectangle & un parallelogramme de même base & de même hauteur sont égaux.*

Soit le rectangle ABCD & le parallelogramme EBCF Fig. 50.
qui ont même base ; sçavoir BC, & qui ont aussi même hauteur, puisqu'ils sont entre les mêmes paralleles. Il faut démontrer que leurs surfaces sont égales.

DEMONSTRATION.

Deux superficies sont égales lorsque les élémens de l'une sont égaux à ceux de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans les deux figures. Or 1°. Les élémens du rectangle sont égaux à ceux du parallelogramme, puisque les élémens de l'une & de l'autre figure, comme GH & KL sont égaux chacun à la base commune BC. 2°. Le nombre des élémens est égal dans les deux figures, parce qu'elles ont même hauteur. La vérité de cette seconde partie paroît encore en ce que si on prolonge tous les élémens du rectangle, ils rempliſ-

sent l'aire ou la surface du parallelogramme, & par conséquent il y a autant d'élemens dans l'une que dans l'autre de ces deux figures; donc le rectangle & le parallelogramme sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On pourroit peut-être objecter contre cette démonstration que le parallelogramme contient plus d'élemens que le rectangle, parce que dans le parallelogramme il y a autant d'élemens ou de lignes paralleles à la base qu'il y a de points dans le côté EB : & de même il y a autant de ces élemens dans le rectangle, qu'il y a de points dans le côté AB. Or il y a plus de points dans l'oblique EB, que dans la perpendiculaire AB.

Il est vrai que si on prend des points égaux dans les deux lignes EB & AB, il y en a plus dans la premiere que dans la seconde; & par conséquent si on conçoit qu'il y a des élemens tirez de tous ces points, il y en aura plus dans le parallelogramme que dans le rectangle, mais aussi les élemens du parallelogramme seront moindres en largeur que ceux du rectangle dans la même proportion qu'ils seront en plus grand nombre; en sorte que s'il y a deux fois plus d'élemens dans le parallelogramme, ils n'auront que la moitié de la largeur de ceux du rectangle. Cela paroîtra clairement si on tire des paralleles à la base qui passent au travers du rectangle & du parallelogramme: car dans cette hypothese les mêmes lignes qui servent d'élemens aux deux figures, occupent par leur largeur une plus grande partie du côté du parallelogramme que de celui du rectangle, à cause de l'obliquité du premier côté; & par conséquent, puisque les élemens étant supposez égaux en largeur dans les deux figures, ceux du parallelogramme répondent à de plus grands points du côté, il s'ensuit que si on prend dans ce côté des points égaux à ceux du côté du rectangle, & qu'on conçoive des élemens tirez de ces points dans les deux figures, ceux du parallelogramme auront moins de largeur que ceux du rectangle.

AUTRE DEMONSTRATION.

Le rectangle & le parallelogramme ont le triangle commun BOC ; il n'y a donc plus qu'à faire voir que l'autre partie ABOD du rectangle est égale à la partie EOCF du parallelogramme ; ce que je démontre ainsi : le triangle ABE est égal en tout au triangle DCF : car 1°. La perpendiculaire AB du premier est égale à la perpendiculaire DC du second, puisque ce sont des côtez opposez d'un rectangle. 2°. Les deux obliques BE & CF sont aussi égales, parce que ce sont des côtez opposez du parallelogramme (43). 3°. Les lignes AE & DF sont encore égales ; car elles ont une partie commune, sçavoir DE ; & d'ailleurs les deux autres parties AD & EF sont égales entr'elles, puisqu'elles sont égales chacune à la base BC ; par conséquent les trois côtez du premier triangle sont égaux aux trois côtez du second ; ainsi les deux triangles sont égaux en tout ; donc si on retranche la partie commune DOE, le reste ABOD du premier triangle sera égal au reste EOCF du second. Mais ces restes sont les deux parties du rectangle & du parallelogramme qu'il falloit démontrer égales. Par conséquent le rectangle est égal au parallelogramme. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici une difficulté que l'on peut proposer contre ce Théorême fondamental, pour prouver que le parallelogramme a plus de surface que le rectangle. Les côtez du parallelogramme étant plus grands que ceux du rectangle, il est certainement plus long, & d'ailleurs il a autant de largeur, puisqu'ils ont même base. Par conséquent le premier a une plus grande surface que l'autre.

J'avoüe que le parallelogramme est plus long que le rectangle, mais aussi il a moins de largeur : car la largeur se mesure par une perpendiculaire entre les deux

côtez, & non par la base, à moins qu'elle ne soit perpendiculaire aux côtez, comme dans le rectangle. Or il est clair que la perpendiculaire tirée entre les côtez du parallelogramme est moindre que la base, puisque cette base est oblique par rapport à ces côtez du parallelogramme.

COROLLAIRE I.

124. Deux parallelogrammes qui ont des hauteurs égales, ou, ce qui est la même chose, qui sont entre mêmes paralleles, & qui ont des bases égales, sont égaux en surface. C'est une suite nécessaire du Théorême, parce que chacun de ces parallelogrammes est égal à un rectangle de même base & de même hauteur.

Fig. 51. 125. Avant de passer au second Corollaire, il faut remarquer qu'un triangle, comme ABD, est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur : car si on fait le parallelogramme ABDC dont le côté AB & la base BD soient deux côtez du triangle, il est certain que le troisiéme côté AD du triangle divise le parallelogramme en deux parties égales (44.); parce que ce côté sert de diagonale ; par conséquent le triangle ABD est la moitié du parallelogramme ABDC, qui a même base & même hauteur que le triangle.

COROLLAIRE II.

Fig. 51. 126. Deux triangles, comme ABD & EGH, qui ont des hauteurs égales, ou qui sont entre mêmes paralleles, & qui ont aussi des bases égales, sont égaux en surfaces : car, selon la remarque précédente, ces triangles sont moitiez des parallelogrammes AD & EH qui ont même hauteur & même base que les triangles. Or nous venons de dire dans le premier Corollaire, que ces parallelogrammes sont égaux ; donc leurs moitiez sont aussi égales.

COROLLAIRE III.

127. Un triangle, comme CED, qui a même base qu'un parallelogramme CB, & qui a une hauteur double de celle du parallelogramme, lui est égal en surface: car supposons un autre parallelogramme, qui ait même base & même hauteur que le triangle, il est clair que le triangle & le parallelogramme CB ne sont chacun que la moitié de cet autre parallelogramme, & par conséquent le triangle est égal au parallelogramme CB. Fig. 52.

COROLLAIRE IV.

128. Un triangle comme CAE, qui a même hauteur qu'un parallelogramme tel que AD, & qui a une base double, lui est égal en surface. Cela se démontre de la même maniere que le Corollaire précedent. Fig. 53.

THEOREME II.

129. *Un trapeze, comme* ACDB, *dont les deux côtez* AB *&* CD *sont paralleles, est égal à un parallelogramme de même hauteur, & qui auroit pour base une ligne moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux côtez paralleles.* Fig. 54.

Prenez CK égale à AB, & divisez le reste KD en deux parties égales au point P: tirez ensuite la ligne PE parallele au côté AC, vous aurez le parallelogramme ACPE ou AP, qui a la même hauteur que le trapeze, & dont la base CP est moyenne proportionnelle arithmétique entre AB ou CK & CD; puisque CK est autant surpassé par CP, que CP l'est par CD. Il s'agit donc de démontrer que ce parallelogramme AP est égal en surface au trapeze.

DEMONSTRATION.

Le pentagone ACPHB est commun au parallelogramme & au trapeze; par conséquent si le triangle

BHE, qui eſt le reſte du parallelogramme, eſt égal au triangle DHP reſte du trapeze, ces deux figures ont des ſurfaces égales. Or les deux triangles BHE & DHP ſont égaux; car 1°. L'angl. B eſt égal à l'angle D, parce qu'ils ſont alternes entre paralleles. 2°. Les angles E & P de ces deux triangles ſont auſſi égaux par la même raiſon. 3°. Les cótez BE & DP, ſur leſquels ces angles ſont formez, ſont encore egaux: car les deux lignes AE & CP ſont égales, puiſque ce ſont des côtez oppoſez du parallelogramme (45.): d'ailleurs les deux parties AB & CK de ces côtez ſont égales par l'hypotheſe; donc les deux autres parties BE & KP ſont auſſi égales. Or DP eſt encore égal à KP par l'hypotheſe; donc les côtez BE & DP des deux triangles BHE & DHP ſont égaux; ainſi les deux triangles ſont égaux (27.); par conſéquent le parallelogramme eſt égal au trapeze. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME III.

130. *La ſurface d'un cercle eſt égale à la ſurface d'un triangle rectangle qui a pour hauteur le rayon, & pour baſe une ligne droite égale à la circonférence.*

DEMONSTRATION.

Fig. 55. Soit le cercle de la Figure 55, & le triangle rectangle CAB qui a pour hauteur le rayon CA, & pour baſe la ligne droite AB égale à la circonférence. Pour démontrer que le cercle eſt égal au triangle, il faut concevoir que l'un & l'autre eſt partagé en ſes élemens, & faire voir, 1°. Qu'il y a autant d'élemens dans le cercle que dans le triangle. 2°. Que les élemens du cercle ſont égaux aux élemens correſpondans du triangle.

Premierement, il y a autant d'élemens dans le cercle, qu'il y en a dans le triangle: car les élemens du cercle ſont des circonférences concentriques, & les élemens du triangle ſont des lignes paralleles à la baſe. Or

il y a autant de circonférences concentriques dans le cercle, que de lignes paralleles à la base dans le triangle, puisque le nombre en est mesuré de part & d'autre par la ligne CA, qui est en même-tems rayon du cercle, & hauteur du triangle.

En second lieu, chaque circonférence, comme *ad*, est égale à la base correspondante *ab* du triangle : car les circonférences étant entr'elles comme les rayons, on a cette proportion ; la grande circonférence AD est à la petite *ad* : : CA . *ca* : de même à cause des triangles semblables CAB, *cab*, on a encore la proportion AB. *ab* :: CA . *ca* ; ainsi, puisque la raison de AD à *ad*, & celle de AB à *ab*, sont égales chacune à une troisiéme, sçavoir, à celle de CA à *ca* ; il faut qu'elles soient égales entr'elles. On a donc encore la proportion AD . *ad* : : AB . *ab* : & *alternando*, AD . AB : : *ad* . *ab*. Or dans cette derniere proportion, l'antécedent & le conséquent de la premiere raison sont égaux par l'hypothese, puisque l'on suppose que la base du triangle est égale à la circonférence du cercle ; par conséquent les deux termes *ad* & *ab* de la seconde raison sont aussi égaux (Liv. I. Art. 161). On peut demontrer de la même maniere que chaque circonférence est égale à la base correspondante du triangle ; ainsi les élemens du cercle sont égaux aux élemens correspondans du triangle : d'ailleurs le nombre des élemens est égal de part & d'autre : par conséquent le cercle est égal au triangle. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

131. Un secteur de cercle, comme CAD, est égal au triangle rectangle CAB, qui a pour hauteur le rayon CA, & pour base une ligne droite égale à l'arc du secteur. Cela se démontre de la meme maniere que le Théorême, en faisant voir qu'il y a autant d'élemens Fig. 58.

dans le ſecteur, que dans le triangle, & que les élemens correſpondans dans les deux figures ſont égaux.

132. Un triangle rectangle eſt égal à tout autre triangle de même baſe & de même hauteur (126.); & par conſéquent on peut dire généralement, qu'un cercle eſt égal en ſurface à un triangle quelconque qui a pour hauteur le rayon du cercle, & pour baſe une ligne droite égale à la circonférence. De même on peut dire en général, qu'un ſecteur de cercle eſt égal à un triangle quelconque, qui a pour hauteur le rayon du ſecteur, & pour baſe une ligne droite égale à l'arc de ce ſecteur.

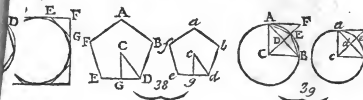
PROBLEME.

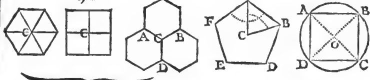
Fig. 57. 133. *Une figure rectiligne, comme* ABCDE, *étant donnée, en faire une autre qui lui ſoit égale, & qui ait un côté de moins.*

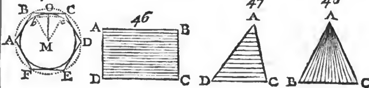
Du point A tirez la ligne AC qui retranche le triangle ABC; enſuite du point B, tirez la ligne BF parallele à la ligne AC; enfin prolongez le côté DC juſqu'à la rencontre de la ligne BF. Je dis que ſi du point A, vous menez la ligne AF au point où le côté DC rencontre la parallele BF, on aura le quadrilatere AFDE, égal au pentagone donné ABCDE. En voici la démonſtration.

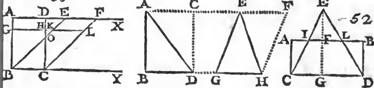
La ſurface AEDC eſt commune au quadrilatere & au pentagone; il n'y a donc qu'à faire voir que le triangle AFC qui eſt le reſte du quadrilatere, eſt égal au triangle ABC, reſte du pentagone. Or ces deux triangles ſont égaux (126.); puiſqu'ils ont la même baſe, ſçavoir AC, & qu'ils ſont entre les mêmes paralleles BF & AC.

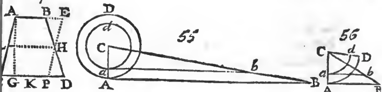
On pourroit par la même méthode réduire le quadrilaterre AFDE en un triangle égal en ſurface. Pour cela il faudroit mener une ligne du point A au point D; enſuite tirer par le point E une parallele à la ligne


37
D E F G
A F B C E G D 38
a f b c e g d
A F D E C B 39
a c


41
C
C
A C B D
42
A F B C E D
43
A B O D C


45
B O C b c A M D F E
46
A B D C
47
A D C
48
A B C


50
A D E F G H K O L X B C X
51
A C E F B D G H
52
E A I F L B C G D


54
A B E H G K P D
D d C a A
55
b B
56
C d D a b A E

Digitized by Google

AD, & prolonger CD jusqu'à la rencontre de cette parallele ; enfin tirer la ligne AG, & on auroit le triangle GAF égal au quadrilatere AFDE, comme il paroît en faisant l'application de la démonstration qui précede.

134. Il suit de-là, que tout polygone peut se réduire en triangle : d'ailleurs nous donnerons la méthode de faire un quarré égal à un triangle. Par conséquent toute surface rectiligne peut se réduire en quarré : c'est ce qu'on appelle la *quadrature* des surfaces rectilignes.

DE LA MESURE DES FIGURES PLANES.

135. Les mesures des superficies sont d'autres petites superficies connuës & déterminées : comme le pied quarré, la toise quarrée, &c.

136. On entend par un *pied quarré*, une surface quarrée dont les quatre côtez sont chacun égaux à un pied en longueur ; telle seroit la Figure 69, si chacun des côtez avoit un pied en longueur. De même un quarré dont chaque côté est égal à une toise en longueur, est appellé *toise quarrée*, &c.

THEOREME I.

137. *La surface d'un rectangle est égale au produit de sa hauteur par sa base, ou de sa base par sa hauteur.*

DEMONSTRATION.

Soit le rectangle AC dont le côté AB contienne 3 toises, & la base BC en contienne 4. Si on multiplie 3 par 4, le produit sera 12 ; il faut donc faire voir que la surface de ce rectangle contient 12 toises quarrées. Pour cela, il faut diviser le côté du rectangle en trois toises, & sa base en quatre : ensuite par les points de division du côté AB, tirez des paralleles à la base, & par les points de la base, tirez des paralleles aux côtez ; toutes ces paralleles formeront des toises quarrées disposées en rangs paralleles à la base, dont chacun contiendra au- Fig. 58.

tant de toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans la base, c'est-à-dire 4 : mais d'ailleurs il y aura autant de ces rangs de toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans le côté du rectangle, c'est-à-dire 3 ; donc la somme des toises quarrées du rectangle, est égale à 3 fois 4, qui est le produit du nombre des toises de la base, par le nombre des toises du côté. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

138. La surface d'un parallelogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur : car tout parallelogramme est égal à un rectangle de même base & de même hauteur. Or on vient de démontrer que pour avoir la superficie d'un rectangle, il falloit multiplier sa base par sa hauteur ; par conséquent pour avoir la surface d'un parallelogramme, il faut aussi multiplier sa base par sa hauteur.

139. Remarquez que dans un parallelogramme qui n'est pas rectangle, la hauteur est différente du côté qui fait un angle avec la base, parce que cette hauteur se prend de la perpendiculaire tirée entre les deux bases : mais lorsque le parallelogramme est rectangle, alors le côté étant perpendiculaire aux bases, il mesure la hauteur du parallelogramme.

COROLLAIRE II.

140. La surface d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur, ou au produit de sa hauteur par la moitié de sa base. C'est une suite nécessaire des Corollaires dans lesquels on a démontré (127 & 128), que le triangle est égal au parallelogramme, qui a même base & la moitié de la hauteur du triangle ; ou bien à un parallelogramme qui a même hauteur que le triangle & la moitié de sa base.

On peut encore dire que la ſurface du triangle eſt égale à la moitié du produit de ſa baſe par ſa hauteur. Cela revient au même que ce que nous venons de dire dans le Corollaire.

141. Remarquez que lorſque le triangle eſt rectangle, comme ABD, on peut prendre BD, qui eſt un des côtez de l'angle droit pour la baſe; auquel cas l'autre côté AB du même angle eſt la hauteur du triangle, parce que ce côté eſt perpendiculaire à la baſe. C'eſt pourquoi afin d'avoir la ſurface d'un triangle rectangle, il faut multiplier un des côtez de l'angle droit par la moitié de l'autre côté, & le produit donne la ſurface du triangle, ou bien il faut multiplier un de ces côtez par l'autre, & prendre la moitié du produit. Fig. 51.

COROLLAIRE III.

142. L'aire ou la ſuperficie du cercle eſt égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence du cercle, ou de la circonférence par la moitié du rayon: car on démontre (132), que le cercle eſt égal au triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour baſe une ligne droite égale à la circonférence. Or ce triangle eſt égal au produit de ſa hauteur qui eſt le rayon par la moitié de ſa baſe, c'eſt-à-dire, par la moitié de la circonférence; donc le cercle eſt auſſi égal au produit du rayon par la moitié de la circonférence.

On démontrera de la même maniere, que l'aire d'un ſecteur de cercle eſt égal au produit du rayon par la moitié de l'arc du ſecteur, ou de l'arc par la moitié du rayon.

COROLLAIRE IV.

143. La ſurface d'un trapeze qui a deux côtez paralleles, eſt égale au produit de ſa hauteur par une moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux côtez paralleles. Cela ſuit du Théorême II (129.); Fig. 54.

dans lequel on a démontré que le trapeze qui a deux côtez paralleles, est égal à un parallelogramme de même hauteur, & dont la base est moyenne proportionnelle arithmétique entre ces deux cotez paralleles.

THEOREME II.

144. *Une figure circonscrite à un cercle, est égale au produit du rayon du cercle, par la moitié du perimetre de la figure.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 59. Soit le polygone circonscrit ABCDE : il faut faire voir qu'il est égal au produit du rayon FG du cercle par la moitié du perimetre. Pour cela tirez du centre F des lignes, comme FA, FB, &c. aux angles du polygone. Il est évident que ces lignes diviseront le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtez. D'ailleurs ces triangles auront une hauteur égale, sçavoir, un rayon comme FG, tiré au point de contingence, parce que tout rayon tiré au point de contingence, est perpendiculaire à la tangente (Liv. I. Art. 115). Or chacun des triangles, comme DFC, est égal au produit de la moitié du côté DC qui est la base, par le rayon FG qui est la hauteur. Donc la somme des triangles, ou le polygone circonscrit est égal au produit de la moitié de tous les côtez, c'est-à-dire, de la moitié du perimetre par le rayon du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut dire aussi qu'un polygone circonscrit à un cercle, est égal au produit du perimetre entier par la moitié du rayon, ou bien à la moitié du produit du perimetre par le rayon entier. Il est évident que tout cela revient à la même chose que l'énoncé du Théorême.

COROLLAIRE I.

145. Tout polygone régulier est égal au produit du rayon droit par la moitié du perimetre. Ce Corollaire

n'eſt qu'une application du Théorême, parce qu'on peut toûjours regarder un polygone régulier comme circonſcrit à un cercle dont le rayon ſeroit égal au rayon droit du polygone (77).

COROLLAIRE II.

146. La ſuperficie du cercle eſt égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence. C'eſt une ſuite du Corollaire précédent, puiſque le cercle eſt un polygone régulier dont les côtez ſont infiniment petits. Nous avons déja démontré la même propoſition dans le troiſiéme Corollaire du premier Théorême (142).

147. Remarquez que toute figure rectiligne comme A pouvant être réduite en triangle, on aura la meſure de l'aire de cette figure, ſi on prend celle de tous les triangles. Fig. 60.

PROBLEME I.

148. *Faire un quarré égal à un parallelogramme donné.*

Soit le parallelogramme dont la hauteur eſt A & la baſe C. Pour avoir un quarré égal à ce parallelogramme, il faut chercher (Liv. I. Art. 172.) une moyenne proportionnelle B entre la hauteur & la baſe du parallelogramme, le quarré de cette moyenne proportionnelle eſt égal au parallelogramme : car par l'hypotheſe A . B : : B . C ; donc le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes A & C eſt le parallelogramme; puiſque pour avoir l'aire du parallelogramme, il faut multiplier la hauteur par la baſe : & le produit des moyens eſt le quarré de la moyenne proportionnelle B ; donc le quarré de la moyenne proportionnelle eſt égal au parallelogramme. Fig. 61.

Si le parallelogramme eſt rectangle, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre le côté & la baſe du rectangle, parce que pour lors la hauteur eſt égale au côté.

PROBLEME II.

149. *Faire un quarré égal en surface à un triangle.*

Cherchez une moyenne proportionnelle entre la hauteur & la moitié de la base, ou entre la base & la moitié de la hauteur, le quarré de cette moyenne proportionnelle sera égal en surface au triangle : car nommant la hauteur du triangle $2a$, sa base $2b$, & la moyenne proportionnelle m, on aura par l'hypothese $2a \cdot m :: m \cdot b$, ou bien, $a \cdot m :: m \cdot 2b$. Par conséquent $mm = 2ab$, c'est-à-dire, que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Or ce produit mm est le quarré de la moyenne proportionnelle : D'ailleurs $2ab$ représente la surface du triangle, puisqu'elle est égale au produit de la hauteur multipliée par la moitié de la base, ou de la base multipliée par la moitié de la hauteur. Donc le quarré est égal au triangle.

Si le triangle est rectangle, & qu'on prenne un des côtez de l'angle droit pour base, l'autre côté de cet angle sera la hauteur, parce qu'il est perpendiculaire à la base. Il faudra donc chercher une moyenne proportionnelle entre un de ces côtez & la moitié de l'autre.

C'est ici où nous devons parler du fameux problême de la quadrature du cercle, que l'on n'a encore pû résoudre jusqu'à présent. Ce problême consiste à trouver une méthode géométrique de faire un quarré égal en surface à un cercle donné.

150. Nous avons démontré qu'un cercle est égal en surface à un triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. Or ce triangle par le problême précedent, est égal au quarré de la moyenne proportionnelle entre la hauteur & la moitié de la base du triangle ; par conséquent ce quarré qui a pour côté une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence, est égal au cercle. Ainsi pour avoir un quarré égal au cercle donné,

donné, il faut trouver une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence du cercle.

151. Nous avons donné (Liv. I. Art. 172.) la méthode de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites : c'est pourquoi si on pouvoit trouver géométriquement une ligne droite égale à la demi-circonférence, il seroit aisé d'avoir une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence : ce qui donneroit la solution du problême de la quadrature du cercle, parce que le quarré de cette moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence seroit égal au cercle, comme nous venons de le démontrer. On voit donc que pour résoudre ce problême, il ne s'agit que de trouver une méthode géométrique de tirer une ligne droite égale à la moitié de la circonférence.

152. Archimede a cherché à exprimer en nombres le rapport de la circonférence au diametre : mais il n'a pû trouver exactement ce rapport ; il a cependant démontré, comme nous l'avons dit (101.), que ce rapport étoit un peu moindre que celui de 22 à 7, & plus grand que celui de $21 \frac{70}{71}$ à 7. Or si on connoissoit exactement par des nombres le rapport de la circonférence au diametre, il ne seroit pas difficile de trouver une ligne droite égale à la circonférence, parce que le diametre est une ligne droite à laquelle la circonférence auroit un rapport connu ; par exemple, si le rapport de la circonférence au diametre étoit précisément égal à celui de 22 à 7, pour lors afin de trouver la circonférence d'un cercle dont on auroit le diametre, il faudroit tirer une ligne droite indéfinie, & prendre sur cette ligne trois parties qui soient chacune égales au diametre ; la somme de ces trois parties seroit égale à 21, parce que chaque diametre est de 7 : ensuite il n'y auroit plus qu'à diviser le diametre en 7 parties égales,

& ajoûter une de ces parties aux 21, & on auroit une ligne droite égale à la circonférence cherchée ; & par conséquent le problême de la quadrature du cercle seroit résolu.

Mais quoique ce rapport ne puisse peut-être pas s'exprimer en nombres, ou, ce qui est la même chose, quoique la circonférence & le diametre du cercle soient peut-être immensurables, il ne s'ensuit pas que l'on ne puisse avoir une maniere géometrique de trouver une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle dont on a le diametre : car, par exemple, lorsque le côté d'un quarré est donné, il est facile de trouver la diagonale : il n'y a qu'à construire le quarré, & tirer ensuite une ligne droite d'un angle à un autre angle opposé : cependant cette ligne est incommensurable avec le côté, comme nous le démontrerons à la fin de ce second Livre.

Il y a tant de Géometres non moins remarquables par la supériorité de leur génie que par une profonde connoissance des mathématiques, qui ont cherché inutilement la quadrature du cercle, que c'est une témérité insupportable à des commençants d'espérer de la trouver. Cependant on en voit tous les jours qui sçachant à peine les élémens de Géométrie s'occupent sérieusement à la découverte de ce problême, qui d'ailleurs ne serviroit de rien dans la pratique pour trouver la circonférence & la surface d'un cercle, ou la solidité d'un globe dont on connoît le diametre, puisque le rapport de 113 à 355 découvert par Métius, approche tellement du véritable rapport du diametre à la circonférence, qu'il seroit impossible de s'assurer dans la pratique de s'en être autant approché quand bien même on auroit en nombre le rapport exact du diametre à la circonférence : en effet ce rapport de 113 à 355 ne s'écarte pas de l'exactitude seulement d'une ligne, c'est-à-dire, de la douziéme partie d'un pouce sur une

circonférence dont le diametre ſeroit d'une lieuë & demie, quoique l'erreur ſoit d'autant plus grande que le diametre eſt long.

La rapport approché de la circonférence au diametre trouvé par Archimede, ſçavoir, celui de 22 à 7, ou le rapport de Metius, qui de 355 à 113, ſuffit pour connoître à peu-près la ſurface d'un cercle dont on connoît le rayon ou le diametre : c'eſt ce que nous allons expliquer dans le Problême ſuivant.

PROBLEME.

153. *Trouver la ſurface d'un cercle dont on connoît le diametre.*

Soit un cercle dont le diametre ait 800 pieds. Pour en avoir la ſurface cherchez d'abord la circonférence (112.) que vous trouverez de 2514 pieds $\frac{2}{7}$, en ſuppoſant le rapport du diametre à la circonférence de 7 à 22 : multipliez enſuite la moitié de la circonférence par le rayon ; c'eſt-à-dire, 1257 $\frac{1}{7}$ par 400 ; le produit 502857 pieds quarrez plus $\frac{1}{7}$ d'un pied quarré, eſt à peu-près la ſurface du cercle dont le diametre eſt de 800 pieds.

Si on ſuppoſe le rapport du diametre à la circonférence égal à celui de 113 à 355, on trouvera la circonférence de 2513 $\frac{31}{113}$ pieds, dont la moitié eſt 1256 $\frac{1}{2}+\frac{31}{226}$ (on a pris la moitié de la fraction $\frac{31}{113}$ en doublant ſon dénominateur.) Or $\frac{1}{2}=\frac{113}{226}$; donc $\frac{1}{2}+\frac{31}{226}=\frac{113}{226}+\frac{31}{226}$: & ces deux dernieres fractions étant ajoûtées enſemble donnent $\frac{144}{226}$ ou $\frac{72}{113}$. Ainſi la moitié de la circonférence eſt 1256 $\frac{72}{113}$, qui étant multipliée par 400, le produit ſera 502654 $\frac{98}{113}$ pieds quarrez. Ce nombre approche beaucoup plus de la véritable ſurface cherchée, que le premier produit 502857 $\frac{1}{7}$; mais

ils sont l'un & l'autre plus grands que cette surface ; parce que le rapport de 22 à 7 & celui de 355 à 113 sont chacun plus grands que celui de la circonférence au diametre.

154. Remarquez qu'en se servant du rapport de 7 à 22, on auroit pû retrancher une unité de la circonférence trouvée ; qui est $2514\frac{2}{7}$ (114.), parce que cette circonférence surpasse 2486 : & pour lors la moitié de la circonférence auroit été seulement $1256\ \frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ ou bien $1256\ \frac{9}{14}$. Or en multipliant ce dernier nombre par 400 le produit est $502657\ \frac{2}{14}$, qui est encore un peu plus grand que celui qu'on a trouvé en se servant du rapport de 113 à 355 ; & par conséquent ce produit $502657\ \frac{1}{7}$ differe plus de la véritable surface cherchée que celui qu'on a trouvé par le rapport de 113 à 355 : mais il en approche beaucoup plus que le premier produit 502857 $\frac{1}{7}$.

DU RAPPORT DES SURFACES.

155. Nous avons fait voir que les surfaces planes sont égales au produit de certaines lignes multipliées l'une par l'autre ; c'est pour cela que ces lignes sont appellées *produisans*. Dans un parallelogramme les deux produisans sont la hauteur & la base. Or c'est par ces produisans qu'on connoît le rapport des surfaces, comme on le verra dans les Théorêmes suivans.

En parlant du rapport des surfaces, on emploie souvent les raisons composées & doublées ; c'est pourquoi il est à propos de répeter quelque chose de ce que nous avons dit sur ces sortes de raisons, en supposant les démonstrations que nous avons données sur cette matiere dans le traité des Proportions.

156. Une raison *composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons. Or pour avoir le produit de plu-

ſieurs raiſons, il faut multiplier les antécedens l'un par l'autre, & les conſéquens de même : par exemple, pour avoir le produit des deux raiſons $\frac{3}{2}$ & $\frac{12}{4}$, on multiplie les deux antécedens 3 & 12, & les deux conſéquens 2 & 4; la raiſon des produits 36 & 8 eſt compoſée de celles de 3 à 2, & de 12 à 4. Pareillement la raiſon compoſée des rapports de A à B & de C à D, eſt celle de AC à BD.

157. Lorſqu'il n'y a que deux raiſons compoſantes ou ſimples, & qu'elles ſont égales, la raiſon compoſée eſt appellée *doublée* : par exemple, ſi on a les raiſons égales de la proportion 6 . 2 :: 12 . 4, en multipliant les antécedens l'un par l'autre, & les conſéquens de même, on aura la raiſon de 72 à 8, qui eſt doublée de celles de 6 à 2, & de 12 à 4. Pareillement ſi les raiſons de A à B & de C à D ſont égales, la raiſon compoſée, qui eſt celle de AC à BD, ſera doublée.

158. Au lieu de prendre des raiſons compoſantes égales exprimées par différens termes, pour avoir une raiſon doublée, on peut ſe ſervir de la même raiſon répetée deux fois; ainſi à la place des deux raiſons de 6 à 2 & de 12 à 4 que l'on a priſes pour avoir la raiſon doublée 72 à 8, on pouvoit prendre les deux raiſons de 6 à 2 & de 6 à 2, qui ne ſont que la même raiſon répetée deux fois. Or la raiſon de 36 à 4, qui eſt doublée de ces deux raiſons, eſt égale à celle de 72 à 8, puiſque les raiſons dont la premiere eſt le produit, ſont égales à celles dont l'autre eſt le produit.

159. Il ſuit de-là que la raiſon qui eſt entre les quarrez eſt doublée de celle qui eſt entre les racines : par exemple, la raiſon de 36 à 4 eſt doublée de celle des racines 6 & 2 : de même la raiſon de AA à BB eſt doublée de celle des racines A & B. Tout cela poſé, il faut encore avant les Théorêmes ſuivans établir la vérité d'un Lemme qui nous ſervira dans la ſuite.

LEMME.

160. *Lorsque deux polygones réguliers sont semblables, les produisans de l'un sont proportionnels aux produisans de l'autre.*

DEMONSTRATION.

La surface d'un polygone regulier est égale au produit du rayon droit par la moitié du perimetre (145); par conséquent les produisans d'un polygone régulier sont le rayon droit & la moitié du perimetre. Or dans deux polygones réguliers semblables, les rayons droits sont proportionnels aux perimetres (86.); ainsi les rayons droits sont aussi proportionnels aux moitiez des perimetres, ou *alternando*, le rayon droit & la moitié du perimetre d'un des polygones semblables sont proportionnels au rayon droit & à la moitié du perimetre de l'autre; c'est-à-dire, que les produisans du premier polygone sont proportionnels à ceux du second.

Fig. 62. 161. Ce Lemme peut aussi s'appliquer aux polygones irréguliers semblables; car quoique dans les polygones irréguliers semblables, tels que sont les deux pentagones ABDEF & *abdef*, on ne puisse pas tirer du même point des rayons droits égaux sur le milieu de chaque côté comme dans les figures regúlieres; cependant on peut toûjours élever du milieu de deux côtez homologues, comme AB & *ab*, des perpendiculaires CG & *cg* qui soient proportionnelles à ces côtez. Or ces perpendiculaires, que nous appellerons rayons droits, seront aussi proportionnels aux perimetres, parce que les perimetres sont entr'eux comme les côtez homologues AB & *ab*. Cela posé, puisque les pentagones sont entierement semblables, & qu'ils ne different que parce que l'un est plus grand que l'autre, il est évident que si la surface du premier est égale au produit du rayon

droit CG par la moitié du perimetre, la surface du second sera aussi égale au produit du rayon *cg*, par la moitié de son perimetre ; & en général, quoique l'on ne sçache pas par quelle partie du perimetre il faut multiplier le rayon droit d'un des pentagones, afin d'avoir sa surface ; cependant il est clair que la partie du perimetre par laquelle il faut multiplier le rayon d'une de ces figures pour avoir sa superficie, est semblable à la partie du perimetre par laquelle il faut multiplier le rayon de l'autre figure pour avoir sa superficie. Or dans ces figures semblables, les rayons droits CG & *cg* sont proportionnels aux perimetres ; donc ils sont aussi proportionnels aux parties semblables de ces périmetres, ou *alternando*, le rayon droit & la partie du perimetre d'une figure sont proportionnels au rayon droit & à la partie semblable du perimetre de l'autre figure ; par conséquent les produisans de l'une sont proportionnels aux produisans de l'autre.

162. On peut voir par la démonstration de ce Lemme que dans deux figures ou polygones semblables quelconques, les produisans correspondans sont proportionnels aux côtez homologues : par exemple, dans les deux pentagones semblables dont on vient de parler, les rayons droits CG & *cg*, qui sont des produisans correspondans, sont proportionnels aux côtez homologues AB & *ab*. On peut même dire en général que les produisans correspondans de deux polygones semblables sont proportionnels aux lignes semblablement tirées dans ces polygones, parce que ces lignes sont entr'elles comme les côtez homologues (67).

THEOREME I.

163. *Deux parallelogrammes sont entr'eux comme le produit des produisans de l'un est au produit des produisans de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Fig. 63. Soient les deux parallelogrammes de la Figure 63 : les produisans de l'un sont A & B, & les produisans de l'autre sont *a* & *b*. Or le premier parallelogramme est le produit de A par B, & le second parallelogramme est le produit de *a* par *b*; donc le premier parallelogramme est au second, comme le produit des produisans de l'un est au produit des produisans de l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

164. Si les hauteurs A & *a* sont égales, les parallelogrammes sont entr'eux comme les bases B & *b* : car lorsque deux grandeurs sont multipliées par une troisiéme, les produits sont comme les grandeurs avant leur multiplication. Or dans ce Corollaire il s'agit de deux grandeurs; sçavoir, les deux bases qui sont multipliées par une troisiéme, qui est la hauteur que l'on suppose égale dans les deux parallelogrammes; par conséquent les deux produits, c'est-à-dire, les deux parallelogrammes sont comme les bases.

COROLLAIRE II.

165. Si les bases sont égales, les parallelogrammes sont comme les hauteurs A & *a* : par exemple, si la hauteur de l'un est double ou triple de la hauteur de l'autre, le premier parallelogramme est le double ou le triple du second. Ce Corollaire se démontre comme le premier.

COROLLAIRE III.

166. Si les deux produisans d'un parallelogramme sont réciproques aux deux produisans d'un autre parallelogramme, ensorte qu'on ait la proportion A . *a* :: *b* . B, le premier parallelogramme est égal au second. La rai-

ſon en eſt que dans toute proportion le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

COROLLAIRE IV.

167. Si le côté *a* ou *b* d'un quarré eſt moyen proportionnel entre les produiſans A & B d'un parallelogramme, le quarré eſt égal au parallelogramme. C'eſt une ſuite du troiſiéme Corollaire, parce que dans ce cas les produiſans du parallelogramme ſont réciproques à ceux du quarré. Fig. 64.

THEOREME II.

168. *La raiſon qui eſt entre deux parallelogrammes, comme ceux de la Figure 63, eſt compoſée des raiſons des produiſans correſpondans; c'eſt-à-dire, des raiſons de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.* Fig. 63.

DEMONSTRATION.

Pour avoir une raiſon compoſée de deux autres, il faut multiplier les deux antécedens l'un par l'autre, & les deux conſéquens de même (156). Or le premier parallelogramme eſt le produit des deux antécedens A & B, & le ſecond parallelogramme eſt le produit des deux conſéquens *a* & *b*; donc la raiſon qui eſt entre les deux parallelogrammes eſt compoſée des raiſons de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.

On peut énoncer ce Théorême de cette autre maniere : deux parallelogrammes ſont en raiſon compoſée des hauteurs & des baſes.

COROLLAIRE I.

169. Si les hauteurs A & *a* des deux parallelogrammes, ſont proportionnels aux baſes B & *b*, en ſorte qu'on ait la proportion A . *a* :: B . *b*, les deux parallelogrammes ſont en raiſon doublée des hauteurs & des baſes.

DEMONSTRATION.

L'on a fait voir dans le Théorême que les deux parallelogrammes sont en raison composée des hauteurs & des bases. Or on suppose dans ce Corollaire que la raison des hauteurs est égale à celle des bases ; par conséquent la raison composée de ces deux raisons est doublée ; ainsi deux parallelogrammes dont les hauteurs sont proportionnelles aux bases, sont en raison doublée de ces hauteurs & de ces bases.

170. Remarquez qu'au lieu de dire que les parallelogrammes dont il s'agit dans ce Corollaire, sont en raison doublée des hauteurs & des bases, on pourroit dire que ces parallelogrammes sont en raison doublée des hauteurs, ou bien en raison doublée des bases : car le rapport des hauteurs étant égal à celui des bases, la raison doublée de ces deux rapports est la même chose (158.) que la raison doublée des hauteurs, ou que celle des bases. Cela paroîtra encore par le Corollaire suivant.

COROLLAIRE II.

171. Si on suppose, comme dans le Corollaire précedent, que les hauteurs de deux parallelogrammes sont proportionnelles à leurs bases, les deux parallelogrammes sont entr'eux comme les quarrez des produisans homologues, c'est-à-dire, comme AA est à *aa*, ou comme BB est à *bb*.

DEMONSTRATION.

Par le premier Corollaire la raison de deux parallelogrammes est doublée de la raison des hauteurs A & *a*, & de celle des bases B & *b* : mais d'ailleurs la raison des quarrez AA & *aa* est doublée des raisons $\frac{A}{a}$ & $\frac{A}{a}$ (159). Donc les deux raisons $\frac{A}{a}$ & $\frac{B}{b}$ étant égales aux deux autres $\frac{A}{a}$ & $\frac{A}{a}$, il s'ensuit que la raison des

parallelogrammes qui eſt doublée des deux premieres, eſt égale à celle des quarrez qui eſt doublée des deux dernieres.

On peut tourner la Démonſtration en cette maniere : la raiſon des parallelogrammes eſt doublée de celle des hauteurs. Or la raiſon des quarrez des hauteurs eſt auſſi doublée de celle des hauteurs, parce que les quarrez ſont en raiſon doublée des racines. Donc la raiſon des parallelogrammes dont il s'agit & celle des quarrez des hauteurs étant chacune doublée de la même raiſon, ſont égales entr'elles, c'eſt-à-dire, que ces parallelogrammes ſont entr'eux comme les quarrez des hauteurs.

172. Les triangles étant moitiez des parallelogrammes de même baſe & de même hauteur, ils ſont entr'eux comme les parallelogrammes. Ainſi les triangles qui ont même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes ; & ceux qui ont même baſe ſont comme leurs hauteurs. En un mot, tout ce que nous venons de dire dans les deux Théorêmes précedens & leurs Corollaires, convient aux triangles.

173. Il faut néanmoins remarquer par rapport au quatriéme Corollaire du premier Théorême, qu'afin d'avoir un quarré égal à un triangle, le côté du quarré doit être moyen proportionnel entre la baſe du triangle & la moitié de la hauteur, & non pas la hauteur entiere, parce que le triangle n'eſt pas égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur ; mais ſeulement au produit de ſa baſe par la moitié de ſa hauteur.

174. Si les côtez d'un des parallelogrammes qu'on compare, ſont autant inclinez ſur leur baſe, que les côtez de l'autre ſont inclinez ſur la leur, on pourra mettre les côtez au lieu des hauteurs dans les deux Théorêmes précedens & leurs Corollaires ; & ces propoſitions ſeront également vraies, parce qu'alors les côtez ſont entr'eux comme les hauteurs qui ſont des perpendiculaires : par exemple, ſi les côtez CD & *cd* des parallelo- Fig. 63.

grammes sont également inclinez sur leur base, ils sont comme les hauteurs A & *a*, & par conséquent en mettant les côtez à la place des hauteurs, le même rapport subsistera toûjours; on pourra donc dire que les parallelogrammes donc les cotez sont également inclinez sont entr'eux comme le produit de la base de l'un par son côté est au produit de la base de l'autre par son côté; & qu'ils sont aussi en raison composée des côtez & des bases. En un mot, les deux Théorêmes & leurs Corollaires démontrez ci-dessus, conviennent à ces parallelogrammes en mettant les côtez à la place des hauteurs.

175. Il faut remarquer par rapport au quatriéme Corollaire du premier Théorême, qu'un parallelogramme n'est pas égal à un quarré dont le côté est moyen proportionnel entre le côté & la base du parallelogramme. Mais au lieu du quarré, il faut supposer un rhombe dont les côtez soient autant inclinez que ceux du parallelogramme, & pour lors ces deux figures seront égales, pourvû que le côté du rhombe soit moyen proportionnel entre le côté & la base du parallelogramme.

176. Lorsque les côtez de deux parallelogrammes sont également inclinez, & qu'ils sont proportionnels aux bases, les parallelogrammes sont appellez semblables. On peut donc dire conformément aux deux Corollaires du second Théorême, que les parallelogrammes semblables sont entr'eux en raison doublée des côtez ou des bases, & qu'ils sont aussi comme les quarrez de ces côtez ou de ces bases.

177. Pareillement les triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des côtez homologues, ou comme les quarrez de ces côtez: par exemple, dans la Figure 63, le premier triangle CDE est au second *cde*, en raison doublée du côté CD au côté *cd*, ou comme les quarrez de ces côtez.

THEOREME III.

178. *Deux polygones ſemblables, ſont en raiſon doublée des produiſa s correſpondans, ou bien comme les quarrez de ces produiſans.*

DEMONSTRATION.

Lorſque deux polygones ſont ſemblables, les deux produiſans de l'un ſont proportionnels aux produiſans de l'autre (160 & 161.); en ſorte que ſi on appelle les deux produiſans du premier A & B, & les deux produiſans du ſecond *a* & *b*, on aura la proportion A . *a* : : B . *b* : par conſéquent, ſelon ce que nous avons dit (169 & 171.) ſur les parallelogrammes, ces polygones ſemblables ſont en raiſon doublée des produiſans correſpondans A & *a* ou B & *b*, ou bien comme les quarrez de ces produiſans.

Ce Théorême convient également aux figures régulieres & irrégulieres ſemblables, parce que les produiſans de deux figures irrégulieres ſemblables ſont proportionnels de même que les produiſans de deux figures régulieres.

COROLLAIRE I.

179. Puiſque les produiſans correſpondans de deux figures ou polygones ſemblables ſont proportionnels aux côtez homologues (162.), & généralement aux lignes ſemblablement tirées dans ces deux figures, par exemple, aux rayons droits, aux rayons obliques, &c. il s'enſuit que les figures ſemblables ſont en raiſon doublée des côtez homologues ou des rayons, ſoit droits, ſoit obliques, ou bien que ces figures ſont entr'elles comme les quarrez de ces lignes.

COROLLAIRE II.

180. Deux cercles ſont en raiſon doublée des rayons;

ou comme les quarrez des rayons. C'est une suite évidente du Corollaire précedent, puisque les cercles sont des polygones réguliers semblables.

181. Les rayons étant entr'eux comme les diametres, comme les cordes d'arcs semblables, comme les circonférences, comme les arcs semblables (98) &c. on peut dire que les cercles sont en raison doublée des diametres, des cordes d'arcs semblables, des circonférences, des arcs semblables, &c. ou bien comme les quarrez de ces lignes.

182. Remarquez donc que les circonférences des cercles sont entr'elles comme les rayons, au lieu que les superficies des cercles sont en raison doublée des rayons, ou comme les quarrez des rayons; en sorte que si le rayon d'un cercle est d'un pied, & le rayon d'un autre cercle est de 3 pieds, les circonférences sont entr'elles comme 1 & 3 : mais les cercles, ou, ce qui est la même chose, leurs surfaces sont entr'elles comme le quarré de 1 est au quarré de 3, c'est-à-dire, comme 1 est à 9. De même si le rayon d'un cercle est de 2 pieds, & le rayon d'un autre cercle est de 5 pieds, les circonférences sont entr'elles comme 2 & 5 : mais les surfaces sont comme 4 & 25, qui sont les quarrez de 2 & de 5.

THEOREME IV. ET FONDAMENTAL.

183. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypotenuse est égal aux quarrez des deux autres côtez.*

DEMONSTRATION.

Fig. 65. Soit le triangle rectangle BAC dont BC est l'hypotenuse. Je dis que le quarré de BC, sçavoir BF est égal à la somme des quarrez AH & AL qui sont les quarrez des deux autres côtez. Pour le démontrer, du point A qui est le sommet de l'angle droit, je tire la ligne ADG perpendiculaire sur l'hypotenuse; elle partagera le quarré BF en deux rectangles BG & DF. Il faut prouver que BG

eſt égal à AH qui eſt le quarré de AL, & que DF eſt égal à AL quarré de AC; c'eſt ce que je fais en cette maniere : on a démontré (61.) que le côté AB eſt moyen proportionnel entre la baſe BC & la partie BD. Or BE=BC; donc BE . AB : : AB . BD; donc le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes eſt le rectangle BG, & le produit des moyens eſt le quarré de AB; donc le rectangle BG eſt égal au quarré de AB. On a auſſi démontré (61.) que l'autre côté AC eſt moyen proportionnel entre la baſe BC & l'autre partie DC. Or BC=CF; donc CF . AC : : AC . DC; donc le rectangle DF qui eſt le produit des extrêmes, eſt égal au quarré de AC produit des moyens. Nous avons donc le rectangle BG égal au quarré de AB, & le rectangle DF égal au quarré de AC. Or ces deux rectangles ſont les deux parties du quarré BF; donc le quarré BF, qui eſt le quarré de l'hypotenuſe, eſt égal au quarré de AB, plus au quarré de AC.

Cette Démonſtration eſt fondée ſur les proportions : nous en allons donner une autre qui en eſt indépendente & qui peut être facilement entenduë par ceux même qui ne ſçavent que les premiers élemens de la Géométrie.

Soit le triangle BAC dont l'angle A eſt droit : je dis que le quarré de BC eſt égal au quarré de AB, plus au quarré de AC. Pour le prouver il faut prolonger le côté AB de part & d'autre, en ſorte que les deux lignes AD & AP ſoient chacune égales à la ſomme des côtez AB & AC. Il faut pareillement prolonger le côté AC de façon que les lignes AH & AL ſoient auſſi l'une & l'autre égales à la ſomme des mêmes côtez. Enſuite achevez les quarrez AF & AN. Après cela diviſez chaque côté du quarré AF en deux parties égales aux côtez AB & AC du triangle donné, en ſorte que les deux côtez de chaque angle droit, comme D, du quarré AF ſoient égaux aux côtez AB & AC de l'an- Fig. 68.

gle BAC, chacun à chacun; & tirez les lignes BE, EG, GI & BI, on aura quatre triangles rectangles dont chacun est égal au triangle BAC, puisque les deux côtez qui comprennent l'angle droit sont égaux à ceux qui forment l'angle droit de ce triangle : de plus le quadrilatere BG dont les quatre côtez sont égaux chacun à l'hypotenuse BC, est le quarré de cette ligne : ce que je prouve en faisant voir que les angles de ce quadrilatere sont droits. L'angle extérieur IBD est égal aux deux intérieurs IAB & BIA (Liv. II. Art. 17). Or ce dernier angle BIA est égal à l'angle EBD, parce que les triangles BAI & EDB sont égaux en tout. Donc l'angle IBE est égal à l'angle IAB qui est droit. Il faut dire [illegible] même chose des autres angles du quadrilatere.

Pour ce qui est du quarré AN, tirez par le point C la ligne CO parallele au côté AP : de même ayant pris sur le côté AP la partie AR égale à AC, menez RM parallele à l'autre côté AL, on aura deux quarrez, sçavoir, AS & SN. Or il est évident que le premier, AS, est le quarré du côté AC : d'ailleurs le second, SN, est le quarré de l'autre côté AB : car la ligne AP est égale par la construction à la somme des côtez AB & AC. Mais la partie AR a été prise égale au côté AC; donc l'autre partie RP est égale au côté AB. Or les deux côtez SO & MN sont chacun égaux à RP à cause du parallelisme des lignes RM & PN : donc ils sont aussi égaux au côté AB. Pareillement les côtez SM & ON sont égaux au côté AB, parce que la ligne AL étant égale par la construction à la somme des côtez AB & AC, il faut que la partie CL soit égale au côté AB. Or les deux côtez SM & ON sont égaux l'un & l'autre à cette partie CL. Ainsi SN est le quarré de AB. Il faut donc faire voir que le quarré de l'hypothenuse BC, sçavoir BG, est égal aux deux quarrez AS & SN : pour cet effet tirez encore les diagonales

Digitized by Google

gonales RO & SL qui partagent les rectangles PS & CM en quatre triangles. Tout cela posé, je démontre ainsi la proposition.

DEMONSTRATION.

Le quarré AF est égal à l'autre quarré AN, puisque les côtez du premier sont égaux à ceux du second. D'ailleurs les quatre triangles du premier sont égaux aux quatre triangles du second : car nous avons déja fait voir que chacun des quatre triangles du premier quarré est égal au triangle BAC. Or les quatre triangles du second quarré sont aussi égaux au même triangle BAC, puisqu'ils sont tous rectangles, & que d'ailleurs les deux côtez qui comprennent l'angle droit sont égaux par la construction aux deux côtez qui renferment l'angle droit du triangle BAC. Si donc on retranche les quatre triangles du premier quarré & les quatre du second, les restes de part & d'autre seront égaux. Or le reste du premier quarré AF est le quarré de l'hypotenuse BC, & le reste du second quarré AN sont les deux quarrez des côtez AB & AC. Par conséquent le quarré de l'hypotenuse est égal aux quarrez des deux autres côtez. Ce qu'il falloit démontrer.

184. La découverte de ce Théorême, qui est la quarante-septiéme proposition du premier Livre d'Euclide, est attribuée à Pythagore, que l'on dit avoir immolé cent bœufs à ses Dieux pour les en remercier, à cause du grand usage qu'on en fait dans la Géometrie. On s'en sert dans la Trigonométrie pour trouver le troisiéme côté d'un triangle rectangle dont on connoît les deux autres : supposons, par exemple, que le côté AB est de 6 pieds, & le côté AC de 8 pieds, je dis que l'hypotenuse BC contient nécessairement 10 pieds : car dans cette hypothese le quarré du côté AB est 36, & celui du côté AC est 64. Or la somme de ces deux quarrez est égale au quarré de l'hypotenuse BC. Ainsi

le quarré de BC sera 100. Donc BC sera la racine quarrée de 100, c'est-à-dire, que BC aura 10 pieds. Si on connoissoit l'hypotenuse, & un des côtez de l'angle droit, on pourroit aussi trouver l'autre côté : soit l'hypotenuse BC de 10 pieds & le côté AB de 6 : il faudra ôter le quarré du côté AB du quarré de l'hypotenuse BC, & le reste sera le quarré du côté AC : j'ôte donc 36 de 100, & le reste 64 est le quarré du côté AC : par conséquent le côté AC est de 8 pieds.

Nous avons démontré dans ce Théorême, que lorsqu'un angle d'un triangle est droit, le quarré de la base de cet angle est égal aux deux quarrez de ses côtez. La proposition inverse ou réciproque de ce Théorême est encore vraie, c'est-à-dire, que si dans un triangle le quarré de la base d'un angle est égal aux deux quarrez des côtez, cet angle est droit. C'est ce que nous allons démontrer dans le Corollaire suivant.

COROLLAIRE I.

185. Un angle comme A est droit, lorsque le quarré de sa base BC est égal aux quarrez des côtez AB & AC; & par conséquent le triangle est rectangle.

DÉMONSTRATION.

On a fait voir dans le Théorôme que l'angle A étant supposé droit, le quarré de la base BC est égal aux deux quarrez des côtez. Or les deux côtez AB & AC demeurant de même longueur, on conçoit que si l'angle droit A diminuë & devient aigu, la base BC sera plus petite, & par conséquent son quarré ne sera plus égal aux deux quarrez des côtez : & si au contraire l'angle droit augmente & devient obtus, pour lors la base BC sera plus grande; ainsi son quarré sera aussi plus grand que les deux quarrez des côtez. Donc le quarré de la base d'un angle ne peut être égal aux deux quarrez des côtez, si cet angle n'est droit.

COROLLAIRE II.

186. Si on construit sur les côtez d'un triangle rectangle des figures semblables, par exemple des cercles qui aient chacun pour diametre ou pour rayon un des côtez du triangle, pour lors le cercle qui aura pour diametre ou pour rayon l'hypotenuse du triangle sera égal aux deux autres cercles pris ensemble; car ces cercles sont entr'eux, comme les quarrez des diametres ou des rayons (180). Or le quarré de l'hypotenuse est égal aux deux autres quarrez; par conséquent le cercle dont le diametre ou le rayon est l'hypotenuse, est égal aux deux autres cercles. Fig. 66.

COROLLAIRE III.

187. Si les deux côtez d'un angle droit, comme BAC, sont égaux, & que l'on fasse un demi-cercle sur chacun des côtez du triangle rectangle, les deux lunules AEBG & AFCH terminées par la demi-circonference seront chacune égales à un des triangles ADB & ADC formez par le rayon perpendiculaire AD.

DEMONSTRATION.

Le demi-cercle BAC qui a pour diametre l'hypotenuse, est égal aux deux autres demi-cercles AEB & AFC pris ensemble (186). Or ces deux demi-cercles sont égaux entr'eux, parce que les côtez AB & AC qui sont les diametres sont supposez égaux; donc le demi-cercle AEB est égal au quart de cercle ADBG; par conséquent en ôtant le segment ABG, qui est une partie commune au demi-cercle & au quart de cercle; les restes, sçavoir, la lunule AEBG & le triangle ADB seront égaux. On démontrera de la même maniere que la lunule AFCH est égale au triangle ADC.

Il est facile de réduire l'un ou l'autre de ces triangles à un quarré égal en surface (149); & par consé-

quent on peut quarrer la lunule. Il est surprenant que l'on ait trouvé si facilement la quadrature de ces lunules, qui sont terminées chacune par des portions de différentes circonférences, & qu'on n'ait encore pû découvrir la quadrature du cercle, qui est terminé par une seule circonférence.

THEOREME VII.

190. *De tous les polygones réguliers isoperimetres, c'est-à-dire, qui ont des perimetres égaux, celui qui a le plus de côtez, est plus grand en superficie.*

DEMONSTRATION.

Le quarré & le pentagone de la Fig. 67 sont supposez réguliers & isoperimetres; je dis donc que le pentagone est plus grand que le quarré : car si l'on inscrit un cercle dans l'un & l'autre polygone, & qu'on tire les rayons CA & CB, on verra que le pentagone est égal au produit de la moitié de son perimetre par le rayon CB (145.), & que le quarré est aussi égal au produit de la moitié de son perimetre par le rayon CA : ainsi, puisque les périmetres sont égaux, le pentagone & le quarré sont comme les rayons CB & CA. Or le rayon CB est plus grand que le rayon CA; car si ces deux rayons étoient égaux, leurs cercles seroient égaux; & par conséquent le perimetre du pentagone seroit moindre que celui du quarré, parce que de tous les polygones réguliers circonscrits à des cercles égaux, celui qui a le plus de côtez a un moindre perimetre (82). Or les perimetres du pentagone & du quarré sont supposez égaux; donc le cercle du pentagone est plus grand que celui du quarré; donc le rayon CB est plus grand que CA; ainsi la surface du pentagone est plus grande que celle du quarré.

On peut démontrer la même chose de deux autres poligones réguliers isoperimetres, dont l'un auroit plus de cotez que l'autre.

COROLLAIRE.

191. Le cercle étant un polygone régulier d'une infinité de côtez : il contient plus de surface que tout autre figure dont le perimetre est égal.

192. Remarquez que si un quarré & un rectangle oblong sont isoperimetres, le quarré est plus grand que le rectangle. Supposons, par exemple, un quarré dont chaque côté ait 10 toises, & un rectangle dont la base ait 15 toises, & le côté perpendiculaire à la base en ait 5, le perimetre du quarré sera de 40 toises aussi-bien que celui du rectangle : cependant le quarré contiendra 100 toises quarrées de surfaces, & le rectangle n'en contiendra que 75. On peut inférer de-là qu'entre les rectangles oblongs isoperimetres, ceux qui approchent plus de la figure du quarré sont plus grands que les autres : par exemple, un rectaugle dont la base est de 12 toises & le côté de 8, est plus grand que celui dont on vient de parler, quoiqu'ils aient de perimetres égaux. Il paroît par-là que deux fonds de terre, comme deux Parcs, ou deux Jardins, &c. peuvent être inégaux, quoique les contours des murailles qui les enferment, soient égaux.

PROBLEME.

293. *Trouver un cercle qui soit double, triple, &c. en un mot qui ait un rapport tel qu'on voudra avec un cercle donné, ou, ce qui revient au même, dont on connoît le diametre.*

Prenez une ligne qui ait avec le diametre du cercle donné un rapport égal à celui que doit avoir le cercle cherché : par exemple, si le cercle qu'on cherche doit être double du premier, il faut prendre une ligne qui soit double du diametre du cercle donné, & chercher ensuite une moyenne proportionnelle entre cette ligne & le diametre connu ; cette moyenne proportionnelle

sera le diametre d'un cercle double de celui qui est donné : car nommant m la moyenne proportionnelle qu'on a trouvée & a le diametre que l'on connoît, la ligne double de ce diametre sera $2a$; on aura donc la proportion continue, $\div 2a . m . a$, ou bien, $\div a . m . 2a$. Aussi selon le Théorême VIII du second Livre de la premiere partie, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisiéme : nous avons donc la proportion, $aa . mm :: a . 2a$. Or le conséquent de la seconde raison est le double de son antécedent : donc le conséquent de la premiere est aussi double de son antécedent : c'est-à-dire, que le quarré du diametre m est double du quarré d'a. Mais d'ailleurs les cercles sont comme les quarrez des diametres. Donc le cercle dont le diametre est m est double du cercle donné dont le diametre est a.

On peut se servir de la même méthode pour trouver le côté ou quelqu'autre ligne d'une figure semblable à une autre dont on connoît un côté homologue ou une ligne correspondante.

194. On pourra faire par le moyen du 2e Corollaire (Art. 186) un cercle égal à la somme de deux ou même de plusieurs autres cercles donnez quoique inégaux. Pour cela il faut faire un angle droit dont les côtez soient prolongez indéfiniment : ensuite il faut prendre avec le compas la longueur du diametre du premier cercle, & mettre une des pointes du compas sur le sommet de cet angle pour marquer sur un côté la longueur de ce diametre que je suppose égal à AB (Fig. 65.) Il faut de même prendre la longueur du diametre du second cercle, & la marquer sur l'autre côté de l'angle (supposons cette longueur égale à AC) après cela tirez la base BC : il est évident que le cercle qui auroit pour diametre BC seroit égal aux deux premiers pris ensemble. On peut par la même méthode décrire un cercle égal à la somme de celui qu'on vient de trouver dont le diametre est BC &

du troisiéme cercle donné. Ce nouveau cercle trouvé seroit égal à la somme des trois premiers donnés. On continuera de la même maniere s'il y a plus de trois cercles donnés.

On pourroit de la même maniere trouver un polygone égal à plusieurs polygones semblables, en prenant à la place des diametres les côtez homologues ou les lignes semblablement tirées.

Nous finirons ce second livre par un Théorême qui fait voir qu'il y a des lignes incommensurables, c'est-à-dire, qui n'ont point de parties aliquotes communes, si petites qu'elles soient. Mais pour demontrer ce Théorême, nous nous servirons de la définition que nous allons donner, & des propositions suivantes qui ont été prouvées dans le traité des raisons & des proportions.

195. La raison de nombre à nombre est celle qui peut être exprimée par des nombres : ainsi le rapport d'une toise à un pied est une raison de nombre à nombre, parce que la toise est au pied comme 6 à 1.

196. Toute raison doublée de raison de nombre à nombre, a pour exposans des nombres quarrez, par exemple la raison de 8 à 72, qui est doublée des raisons égales de 2 à 6 & de 4 à 12, a pour exposans 1 & 9, qui sont les quarrez de 1 & de 3.

197. D'où il suit que toute raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrez, n'est pas doublée de raisons de nombre à nombre, c'est-à-dire, que les raisons simples dont elle est doublée ne sont pas de nombre à nombre.

198. Les quarrez sont en raison doublée des racines qui sont les côtez de ces quarrez : par exemple, la raison de $\overline{BC}^{2}$ à $\overline{BA}^{2}$ est doublée de la raison de BC à BA. Tout cela posé, il sera facile de démontrer le Théorême suivant. Fig. 69.

Digitized by Google

THEOREME.

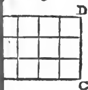
199. *La diagonale d'un quarré est incommensurable avec le côté.*

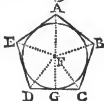
DEMONSTRATION.

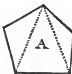
Le quarré de la diagonale BC est égal au quarré de
Fig. 69. BA, plus au quarré de AC (183). Or les deux côtez BA & AC sont égaux; donc le quarré de BC est double du quarré de BA; ainsi ces deux derniers quarrez sont comme 2 & 1. Mais 2 n'est pas un nombre quarré; par conséquent la raison du quarré de BC au quarré de BA n'a pas pour exposans des nombres quarrez. Or cette raison qui est entre ces quarrez est doublée (198): voilà donc une raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrez; ainsi la raison simple dont elle est doublée n'est pas de nombre à nombre (197). Mais cette raison simple est celle de BC à BA (198); donc ces deux lignes ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, ou, ce qui est la même chose, ces deux lignes sont incommensurables.

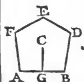
200. Ce Théorême fait voir que la diagonale & le côté d'un quarré n'ont point d'aliquotes communes; en sorte que si l'on prend une aliquote, par exemple, la milliéme partie ou la cent-milliéme, ou la millioniéme, &c. de la diagonale, elle ne sera pas contenuë exactement dans le côté BA; mais elle y sera contenue un certain nombre de fois avec un reste moindre que l'aliquote, quelque petite qu'elle soit: car si une partie étoit contenue 1000 fois, par exemple, dans la diagonale, & 700 fois exactement dans le côté, ces deux lignes seroient entr'elles comme 1000 est à 700, & par conséquent elles seroient entr'elles comme nombre à nombre: ce qui vient d'être démontré impossible.

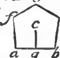
201. Mais quoique la diagonale & le côté d'un quarré soient incommensurables, cependant leurs quarrez sont commensurables, puisqu'ils sont entr'eux comme 2 & 1.

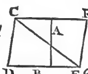

58
D
C

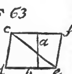

59
A
E
B
F
D
G
C

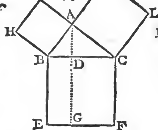

60
A

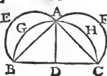

E
F
D
C
A
G
B

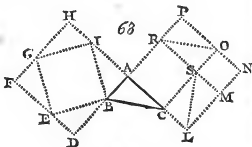

62
e
f
d
c
a
g
b


C
F
A
D
B
E


63
c
f
a
d
b
e


65
A
L
H
B
D
C
E
G
F


66
A
E
F
G
H
B
D
C


H
68
P
I
R
O
G
A
S
N
F
M
B
C
E
L
D


70
B
C
L

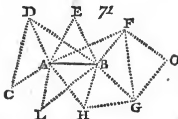

D
E
71
F
A
B
O
C
L
H
G

Fig. 6.

Pour exprimer cela, les Géometres disent que la diagonale & le côté sont incommensurables en longueur, & commensurables en puissance. Nous allons prouver dans les Corollaires suivans qu'il y a des lignes incommensurables tant en puissance qu'en longueur, c'est-à-dire, que les quarrez de ces lignes sont incommensurables, aussi-bien que les lignes elles-mêmes.

COROLLAIRE I.

202. Le quarré de la moyenne proportionnelle entre la diagonale & le côté d'un quarré, est incommensurable avec le quarré de la diagonale : car soit nommée FG cette moyenne proportionnelle, on aura la proportion continue $\div$ BC. FG. BA ; & par conséquent, selon qu'il a été démontré dans le traité des proportions, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier terme est au troisiéme ; c'est-à-dire, $\overline{BC}^2 . \overline{FG}^2 :: BC . BA$. Or la raison de BC à BA n'est pas de nombre à nombre ; donc celle de $\overline{BC}^2$ à $\overline{FG}^2$ n'est pas non plus de nombre à nombre, ou, ce qui est la même chose, les deux quarrez $\overline{BC}^2$ & $\overline{FG}^2$ sont incommensurables.

COROLLAIRE II.

203. Il suit de ce premier Corollaire que les lignes BC & FG sont aussi incommensurables : car si ces deux lignes étoient comme nombre à nombre, par exemple, comme 5 est à 4, il est évident que leurs quarrez seroient comme 25 est à 16 ; & par conséquent ces quarrez seroient commensurables : ce qui est contraire au premier Corollaire.

Ce que l'on vient de dire des lignes BC & FG dans ces deux Corollaires, convient aussi aux lignes FG & BA comparées ensemble, puisque la raison de BC à FG est égale à celle de FG à BA.



LIVRE TROISIÉME.

DES SOLIDES.

DANS le premier Livre nous avons parlé de la ligne qui est l'étenduë en longueur; dans le second nous avons traité de la surface, qui est l'étenduë en longueur & en largeur. Il nous reste à parler du corps ou solide, qui est l'étenduë considerée avec les trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

Entre les corps de différentes figures, on considere principalement les *Prismes*, les *Cylindres*, les *Pyramides* & les *Cones*.

Art. 1. 1. Un Prisme est un corps qui a une grosseur égale dans toute sa longueur, & dont les bases supérieures & inférieures sont des polygones entierement égaux.

2. Une pyramide est un corps dont la base est un polygone, & qui finit en pointe.

3. Le Prisme & la Pyramide prennent différens noms suivant le nombre des côtez de la base; si la base est un triangle, le prisme est appellé *triangulaire*; si c'est un pentagone, le prisme est appellé *pentagonal*, ainsi de suite. C'est la même chose de la pyramide. Il y a une espece de prisme, qu'on appelle *parallelepipede*, c'est celui dont la base est un parallelogramme, cette dénomination ne convient pas à la pyramide.

4. Le Cylindre est un corps rond dont la grosseur est égale dans toute sa longueur, & dont les bases sont des cercles égaux; telle seroit une colomne dont la grosseur seroit par tout la même.

5. Un Cone eſt un corps qui finit en pointe, & dont la baſe eſt un cercle.

6. On peut regarder le cylindre comme un priſme, dont la baſe eſt un polygone régulier d'une infinité de côtez Et de même le cone eſt une pyramide dont la baſe eſt un polygone régulier d'une infinité de côtez.

En parlant des priſmes & des cylindres, nous ſuppoſerons toûjours que la baſe ſupérieure eſt parallele à l'inférieure.

7. Dans un cylindre la ligne tirée du centre de la baſe ſupérieure au centre de la baſe inférieure, eſt appellée l'*axe* du cylindre ; & dans le cone, la ligne tirée du ſommet ou de la pointe du cone au centre de la baſe eſt auſſi appellée *l'axe* du cone. On peut de même concevoir des axes dans les priſmes & les pyramides dont les baſes ſont des polygones réguliers.

8. Lorſque les axes ſont perpendiculaires aux baſes, les priſmes, les cylindres, les pyramides & les cones ſont appellez *droits* ; au contraire ces corps ſont appellez *obliques*, lorſque les axes ſont obliques ſur les baſes.

Quoique la baſe d'un priſme ne ſoit point un polygone régulier, & que ce priſme n'ait point d'axe, cependant il peut être droit, pourvû que les rectangles qui lui ſervent de faces ſoient perpendiculaires à la baſe.

9. Les parallelogrammes qui ſont autour du priſme, & les triangles qui ſont autour de la pyramide, ſont ſouvent appellez les *côtez* du priſme & de la pyramide ; mais comme on appelle auſſi côtez les lignes qui terminent ces parallelogrammes ou ces triangles ; afin d'éviter l'équivoque, nous ne nous ſervirons du terme de *côtez*, que pour déſigner des lignes : par exemple, nous appellerons une ligne tirée du ſommet d'un cone à la circonférence de ſa baſe, *côté* du cone : quant aux parallelogrammes des priſmes, & aux triangles des py-

ramides, nous les appellerons les *faces* de ces corps.

10. Dans les solides terminez par des plans, comme sont les prismes & les pyramides, on remarque des *angles solides*. On entend par angle solide un espace solide terminé en pointe par plusieurs angles plans qui ont un sommet commun : telle est la pointe d'une pyramide : tels sont aussi les coins d'un dez à joüer.

Outre les quatre principaux solides dont nous avons parlé, on distingue encore d'autres especes de corps qu'on nomme *reguliers* : il n'y en a que cinq especes terminées par des surfaces planes.

On entend ici par corps régulier, celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers, égaux & semblables, & dont tous les angles solides sont formez par un nombre d'angles plans. Il y en a cinq, comme nous le venons de dire : sçavoir, le *tetraedre*, compris sous quatre triangles égaux & équilateraux ; l'*octaedre*, compris sous huit triangles égaux & équilateraux ; l'*icosaedre*, compris sous vingt triangles égaux & équilateraux, l'*exaedre* ou le *cube* compris sous six quarrez égaux, & le *dodecaedre*, compris sous douze pentagones égaux & réguliers.

On démontre dans l'ouvrage dont nous faisons l'abregé, qu'il ne peut y avoir que ces cinq especes de corps réguliers.

15. Si on applique deux tetraedres égaux l'un contre l'autre, le solide que forment ces deux corps joints ensemble, n'est pas régulier, quoiqu'il soit terminé par six triangles égaux & équilateraux, parce que des cinq angles solides dont ce corps est composé, il y en a trois qui sont terminez par quatre augles plans, & les deux autres, sçavoir, ceux qui sont opposez aux bases appliquées l'une contre l'autre, ne sont formez que par trois angles plans : c'est pourquoi ceux qui disent que le corps régulier est celui qui est terminé par des polygones réguliers, égaux & semblables, donnent une

définition peu exacte : il faut ajoûter que chaque angle solide du corps régulier est formé par un égal nombre d'angles plans de ces polygones.

Nous partagerons ce troisiéme Livre en deux parties. Dans la premiere nous parlerons de la surface des solides, & dans la seconde, nous traiterons de leur solidité.

DE LA SURFACE DES SOLIDES.

16. Si une ligne, comme A*a*, que l'on suppose perpendiculaire à la base d'un prisme droit, tourne autour de cette base en demeurant toûjours perpendiculaire, elle décrira la surface convexe ou laterale du prisme, c'est-à-dire, le contour sans y comprendre les deux bases. De même, si une ligne, comme A*a*, demeurant toûjours perpendiculaire à la base d'un cylindre droit, parcourt la circonférence de cette base, elle décrira la surface du cylindre. Fig. 1. Fig. 2.

17. S'il s'agit d'une pyramide ou d'un cone, il faut concevoir une ligne attachée au point A, laquelle tourne autour de la pyramide ou du cone, elle décrira la surface de ces solides. Fig. 3. & 4.

18. On peut encore avoir une notion plus sensible de la surface du prisme droit, en imaginant une bande de papier collée tout autour du prisme. Il est évident que si l'on ôtoit cette bande & qu'on la développât, il paroîtroit un rectangle qui auroit la même hauteur que le prisme, & qui auroit pour base une ligne droite égale au perimetre de la base du prisme : ce rectangle qui est nécessairement égal à la surface du prisme, peut être appellé *développement* du prisme. Le développement du cylindre droit est aussi un rectangle qui a pour base une ligne égale à la circonférence de la base du cylindre, & qui a même hauteur que le cylindre. Fig. 1.

Le développement de la pyramide est la somme de

tous les triangles qui en sont les faces ; ainsi la somme de tous ces triangles est la surface de la pyramide. Toutes les lignes droites, comme AB, tirées du sommet du cone droit aux points de la circonférence de la base étant égales, il est évident que si on développe la surface du cone droit, ce développement sera un secteur de cercle qui aura pour rayon le côté AB du cone, & un arc égal à la circonférence de la base du cone.

Fig. 4.

19. Lorsque la base de la pyramide est un polygone régulier, & que la pyramide est droite, tous les triangles qui en sont les faces ont même hauteur & sont égaux entr'eux ; & par conséquent ils sont égaux à un seul triangle qui auroit la même hauteur que celle d'un des triangles, & une base égale à la somme des bases de tous les triangles, ou, ce qui est la même chose, égale au perimetre de la base de la pyramide. La surface d'une pyramide droite dont la base est un polygone régulier, est donc égale à un triangle qui a pour base le perimetre de la base de la pyramide, & la même hauteur que celle d'un des triangles qui servent de faces à la pyramide.

Fig. 3. 20. Remarquez que la hauteur de chaque triangle qui sert de face à la pyramide est une ligne, comme AF, tirée du sommet A perpendiculairement sur la base du triangle ; au lieu que la hauteur d'une pyramide est une ligne tirée du sommet A perpendiculairement sur la base même de la pyramide ; d'où il suit que si la pyramide est droite, la hauteur de chaque triangle est toûjours plus grande que celle de la pyramide ; parce que ces deux lignes étant tirées du même point A, & la seconde étant perpendiculaire à la base de la pyramide, il est nécessaire que la premiere, qui est la hauteur du triangle, soit oblique à cette même base ; & par conséquent plus grande que la hauteur de la pyramide.

Fig. 4. 21. Le cone n'étant qu'une pyramide dont la base est

un polygone régulier d'une infinité de côtez, la ſurface d'un cone droit eſt égale à un triangle qui a pour baſe une ligne droite égale à la circonférence de la baſe du cone, & pour hauteur le côté AB du cone.

22. Ce côté AB du cone eſt la hauteur de chaque triangle infiniment petit, qui compoſe la ſurface du cone, parce que ce triangle étant iſocele & ayant une baſe infiniment petite, la perpendiculaire tirée du ſommet ſur ſa baſe, ne differe du côté que d'une partie infiniment petite, & par conſéquent on peut prendre ce côté pour la perpendiculaire.

23. Le triangle qui a pour hauteur le côté AB du cone droit & pour baſe une ligne droite égale à la circonférence de la baſe, eſt égal au ſecteur de cercle qui a pour rayon le côté AB, & dont l'arc eſt égal à la baſe du triangle (Liv. II. Art. 132.), & par conſéquent à la circonférence de la baſe du cone. Ce ſecteur eſt le développement du cone droit, comme nous l'avons dit.

24. De tout ce qu'on vient de dire, il ſuit que pour avoir la meſure de la ſurface d'un priſme droit, il faut multiplier le perimetre de la baſe par la hauteur du priſme. Et de même pour avoir la ſurface du cylindre droit, il faut multiplier la circonférence de la baſe par la hauteur du cylindre.

25. Si la hauteur du cylindre droit eſt égale au diametre de la baſe, la ſurface du cylindre eſt quadruple de la baſe: car la ſurface du cylindre eſt égale au produit de la circonférence de la baſe par la hauteur entiere, qui eſt le diametre de la baſe: & la ſurface du cercle qui ſert de baſe, eſt égale ſeulement au produit de cette circonférence (Liv. II. Art. 142.) par le quart du diametre ou la moitié du rayon.

26. Pour avoir la ſurface d'une pyramide droite dont la baſe eſt un polygone régulier, il faut multiplier le perimetre de la baſe par la moitié de la hau-

teur d'un des triangles qui ſont les faces de la pyramide, ou bien il faut multiplier cette hauteur par la moitié du perimetre, ou enfin, multiplier la hauteur du triangle par le perimetre, & prendre la moitié du produit.

Fig. 4. 27. Enfin pour avoir la ſurface d'un cone droit, il faut multiplier la circonférence de la baſe par la moitié du côté AB du cone, ou multiplier ce côté entier par la moitié de la circonférence, ou enfin multiplier le côté par la circonférence, & prendre la moitié du produit.

28. Si le côté du cone droit eſt égal au diametre du cercle qui ſert de baſe, la ſurface du cone eſt double de la baſe : car la ſurface du cone eſt égale au produit de la circonférence de la baſe par la moitié du côté, ou du diametre : & la baſe eſt égale au produit de ſa circonférence par la moitié du rayon ou par le quart du diametre. Or ces deux produits ſont entr'eux comme les produiſans inégaux, qui ſont la moitié du diametre & le quart du diametre ; c'eſt-à-dire, que le premier eſt le double du ſecond. Par conſéquent la ſurface du cone eſt double de ſa baſe.

29. Ce cone dont le côté eſt égal au diametre de ſa baſe, eſt appellé *équilatéral*. On conçoit qu'il eſt formé par la révolution d'un triangle équilateral qui tourne autour d'une perpendiculaire tirée du ſommet d'un angle ſur le côté oppoſé. Ainſi la ſurface du cone équilatéral eſt double de ſa baſe, ou, ce qui revient au même, elle eſt à cette baſe comme 2 eſt à 1 : & par conſéquent la ſurface totale en y comprenant la baſe, eſt à cette baſe comme 3 eſt à 1.

30. Remarquez que quand on parle de la ſurface de ces corps, ſoit priſmes, cylindres, pyramides ou cones, on entend le contour de ces ſolides ſans y comprendre les baſes, à moins qu'on ne l'exprime, comme nous venons de faire à la fin de l'article précedent.

Pour

Pour marquer que l'on ne comprend pas les bases du cylindre, lorsqu'on parle de la surface, on ajoûte souvent le terme *convexe*, en disant la surface ou la superficie convexe d'un cylindre. On peut se servir de la même expression pour le cone, & dire la surface convexe d'un cone.

31. On a vû qu'entre les corps terminez par des surfaces planes, il y en a cinq reguliers : mais il n'y en a qu'un seul qui soit parfaitement régulier entre ceux qui sont compris par des superficies courbes ; sçavoir, la *sphere*, ou le *globe*. La sphere est un corps terminé par une surface courbe dont tous les points sont également distans d'un point qu'on nomme centre, qui est en dedans du corps.

Nous allons examiner la formation de la sphere ; ensuite nous en chercherons la superficie. Fig. 5.

32. Si on conçoit qu'un demi-cercle, comme ADB, tourne autour de son diametre AB, il se formera une sphere dont la surface est décrite par la demi-circonférence. Le diametre AB autour duquel le demi-cercle a tourné est appellé *axe* ou *essieu*, & les deux extrêmitez A & B de l'axe sont appellées *poles* de la sphere.

33. Il est évident que la courbure de la surface d'une sphere est uniforme ; c'est-à-dire, que cette courbure est par-tout égale, de même que celle de la circonférence d'un cercle. De cette uniformité de la sphere on déduit les propriétez suivantes.

34. 1°. Tous les rayons sont égaux entr'eux, aussi-bien que tous les diametres.

35. 2°. On peut prendre pour axe chacun des diametres, en observant que les poles sont toûjours les extrêmitez du diametre que l'on prend pour axe.

36. 3°. Si on coupe une sphere par un plan, la section, c'est-à-dire, la nouvelle surface qui paroît après avoir coupé la sphere, cette section, dis-je, est un cercle : car si le plan passe par le centre de la sphere, il est

évident que la section est un cercle dont le diametre est égal à celui de la sphere.

Si le plan qui coupe la sphere ne passe pas par le centre, la section est encore un cercle : pour en avoir la démonstration, il faut concevoir une ligne, comme CF, tirée du centre de la sphere perpendiculairement sur cette section, & une infinité d'obliques, comme C*e*, C*d*, tirées du même centre à tous les points qui sont les extrêmitez de la même section : tous ces points étant à la surface de la sphere, les lignes obliques en sont des rayons, & par conséquent elles sont égales entr'elles; donc ces obliques sont également éloignées de la perpendiculaire ; ainsi elles sont dans la circonférence d'un cercle, au centre duquel aboutit la perpendiculaire ; donc la section d'une sphere coupée par un plan est un cercle, soit que le plan passe par le centre de la sphere, ou qu'il n'y passe pas.

Fig. 5.

37. L'on appelle *grands cercles* de la sphere ceux qui passent par le centre de la sphere, & les autres dont le plan ne passe pas par le centre, sont appellez *petits cercles.*

Lorsqu'on parle des cercles de la sphere, on entend ceux dont la circonférence est sur la surface de la sphere.

38. 4°. Deux grands cercles, c'est-à-dire, deux cercles qui passent par le centre de la sphere, se coupent nécessairement, & leur commune section est une ligne droite qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre de l'un & l'autre cercle.

On peut encore inférer les proprietez suivantes de la maniere dont nous avons formé la sphere.

39. 1°. Les points ***d***, ***d***, ***d***, ***d***, de la demi-circonférence que l'on a fait tourner autour du diametre AB décrivent des circonférences paralleles entr'elles.

40. 2°. Tous les points de chacune de ces circonférences paralleles sont également éloignez d'un des poles

A de la sph re ; ils sont aussi également éloignez de l'autre pole B : c'est pourquoi ces poles A & B peuvent être appellez les poles de ces circonférences paralleles ; & le diametre AB est leur axe.

41. 3°. Tous les cercles paralleles ont les deux mêmes poles & le même axe.

42. 4°. L'axe de ces cercles passe par leurs centres & est perpendiculaire à leurs plans ; & par conséquent il mesure la distance d'un cercle à l'autre, & celle du centre de la sphere & des poles à chacun des cercles.

43. 5°. Il est évident que le plus grand de tous les cercles paralleles est celui qui a le même centre que la sphere, & qui par conséquent est également éloigné des deux poles ; que deux cercles également distans du centre de la sphere, l'un vers le pole A, l'autre vers le pole B sont égaux ; enfin que les cercles paralleles qui sont entre le centre de la sphere & un des poles, sont d'autant plus petits qu'ils sont plus près du pole.

Il faut à présent chercher la mesure de la surface d'une sphere ; pour cela nous nous servirons du cone tronqué, touchant lequel nous établirons deux Lemmes, en supposant toûjours ce cone droit, sans qu'il soit nécessaire d'en avertir davantage.

LEMME I.

44. *La surface convexe du cone tronqué est égale à un trapeze qui a pour hauteur le côté Bb du cone tronqué, & dont les bases sont paralleles entr'ell s & égales aux circonférences des bases supérieure & inférieure du cone.*

DÉMONSTRATION.

Soit le cone entier BAC dont la partie inférieure BbcC est un cone tronqué. Nous avons fait voir que la surface convexe du cone entier est égale au triangle EDF, qui a pour hauteur le côté du cone, & pour base Fig. 6.

la circonférence de la base du cone (on suppose ici ce triangle rectangle ;) par conséquent, si de ce triangle rectangle on ôte la surface du petit cone *bAc*, qui est l'autre partie du cone entier, il restera la surface du cone tronqué. Or la surface du petit cone *bAc* est égale au petit triangle *eDf*, qui a pour hauteur le côté du petit cone, & dont la base est parallele à celle du triangle EDF : car la surface d'un cone est égale à un triangle qui a pour hauteur le côté du cone, & pour base la circonférence de la base Or par l'hypothese la hauteur D*e* du petit triangle *eDf* est égale au côté A*b* du petit cone ; & d'ailleurs la base *ef* du triangle est égale à la circonférence de la base de ce cone : car à cause des triangles semblables EDF & *eDf* l'on a la proportion DE. D*e* : : EF. *ef*. De même à cause des deux autres triangles semblables BAC & *bAc* du cone, la raison des côtez AB & A*b* est égale à la raison des bases BC & *bc*, qui sont les diametres des bases du cone tronqué. Or la raison de ces diametres est égale à celle de leurs circonférences BCB & *bcb* ; par conséquent on a la seconde proportion AB. A*b* : : BCB. *bcb*. Il est visible que dans ces deux proportions les deux premieres raisons sont égales, puisque par l'hypothese DE=AB & D*e*=A*b* ; par conséquent les deux dernieres raisons sont aussi égales ; ce qui donne cette troisiéme proportion EF. *ef* : : BCB. *bcb*, dont les antécedens sont égaux par la supposition : d'où il suit que les conséquens sont aussi égaux (Liv. I. Art. 162.) ; c'est-à-dire, que la base du petit triangle *eDf* est égale à la circonférence du petit cone *bAc*. Mais par l'hypothese la hauteur du petit triangle est encore égale au côté A*b* du petit cone ; donc la surface du petit triangle est égale à celle du petit cone ; ainsi l'autre partie du grand triangle est égale à l'autre partie de la surface du cone entier, ou, ce qui est la même chose, la surface du cone tronqué est égale à un trapeze, dont la hauteur est le côté du cone tronqué,

& dont les bases sont paralleles entr'elles, & égales aux circonférences des bases du cone tronqué. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

45. La surface convexe du cone tronqué est égale au produit de son côté B*b* par une ligne moyenne proportionnelle arithmétique entre la circonférence de la base supérieure, & la circonférence de la base inférieure.

DEMONSTRATION.

On vient de faire voir que la surface du cone tronqué est égale à un trapeze dont la hauteur est le côté du cone tronqué, & dont les bases sont paralleles entr'elles, & égales aux circonférences des bases du cone tronqué. Or la surface du trapeze est égale au produit de sa hauteur par une ligne moyenne arithmétique entre les deux bases (Liv. II. Art. 143.); donc la surface du cone tronqué est égale au même produit.

COROLLAIRE II.

46. La surface convexe du cone tronqué est égale au produit de son côté B*b* par la circonférence MNM également éloignée des deux bases du cone.

Pour faire voir que ce Corollaire est une suite nécessaire du premier, il n'y a qu'à prouver que la circonférence MNM, que l'on suppose également éloignée des deux bases supérieure & inférieure du cone tronqué, est moyenne proportionnelle arithmétique entre les circonférences de ces bases. Pour cela considerez que comme on a fait voir dans la démonstration du Lemme que la ligne *ef* parallele à la base du triangle EDF est égale à la circonférence correspondante du cone; on pourroit de même démontrer que toutes les lignes du triangle paralleles à la même base sont égales aux circonféren-

ces correſpondantes qui compoſent la ſurface du cone; par conſéquent ſi on tire du point G, également éloigné des extrêmitez E & *e* la ligne GH parallele à la baſe du triangle, elle ſera égale à la circonférence MNM, également éloignée des deux baſes du cone tronqué. Or la parallele GH eſt moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux baſes EF & *ef*, comme on va le voir : ainſi la circonférence MNM du cone eſt auſſi moyenne arithmétique entre les circonférences ſupérieure & inférieure qui ſont égales aux deux baſes du trapeze.

47. On a ſuppoſé dans ce ſecond Corollaire que la parallele GH qui eſt tirée du point G également éloigné des extrêmitez de la perpendiculaire E*e*, étoit moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux baſes EF & *ef* du trapeze. En voici la preuve : Soient tirées les perpendiculaires *f*K & HL ; ces perpendiculaires ſont égales, puiſque la parallele GH eſt tirée du point G également éloigné des extrêmitez de la ligne E*e* : d'ailleurs les obliques *f*H & HF ſont auſſi égales (Liv. I. Art. 86.), parce qu'elles ſont également inclinées entre les paralleles ; donc les éloignemens de perpendicule KH & LF ſont égaux (Liv. I. Art. 79.) : ainſi la baſe EF ſurpaſſe autant la ligne GH, que cette ligne GH ſurpaſſe l'autre baſe *ef* ; donc GH eſt moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux baſes.

Avant de paſſer au ſecond Lemme, il eſt néceſſaire de ſçavoir ce que c'eſt qu'un cylindre ou un autre corps *circonſcrit* à une ſphere.

48. Le cylindre circonſcrit eſt celui qui renferme la ſphere ; enſorte qu'il ait pour baſe le grand cercle de cette ſphere & pour hauteur ſon diametre.

49. De même un cube circonſcrit à une ſphere, eſt celui qui renferme la ſphere ; en ſorte que chacune de ſes trois dimenſions eſt égale au diametre de la ſphere.

50. Pour le cone, on l'appelle circonſcrit à la ſphere lorſqu'il renferme la ſphere, & que ſa ſurface touche celle de la ſphere dans une de ſes circonférences, quoi que ce cone ait une hauteur différente du diametre de la ſphere.

51. Quand quelque corps, comme ceux dont nous venons de parler, eſt circonſcrit à une ſphere, cette ſphere eſt appellée *inſcrite* par rapport au corps circonſcrit.

52. Dans le Lemme ſuivant nous ſuppoſerons une tangente, comme EF, dont les deux extrêmitez E & F ſont également éloignées du point S qui touche la demi-circonférence ADB. Nous ſuppoſerons une autre tangente GD qui aboutit à l'extrêmité du rayon CD perpendiculaire à l'axe AB, autour duquel il faut concevoir que la demi-circonférence tourne avec les tangentes EF & GD. Cela poſé, on voit facilement 1°. Que la demi-circonférence décrit en tournant la ſurface d'une ſphere. 2°. Que la tangente EF décrit la ſurface d'un cone tronqué circonſcrit à la ſphere. 3°. Enfin que l'autre tangente GD décrit la ſurface d'une partie d'un cylindre circonſcrit à la même ſphere. Fig. 7.

53. Si on tire par les extrêmitez de la tangente EF les deux lignes paralleles GI & HN qui ſoient perpendiculaires à l'axe AB, auſſi-bien que le rayon CD; & qu'on tire du point E la perpendiculaire EL entre les deux paralleles, elle marquera la hauteur du cone circonſcrit, & ſera égale à GH, qui eſt auſſi perpendiculaire entre les deux mêmes paralleles. Nous n'avons pas beſoin dans le Lemme ſuivant de toute la ſurface cylindrique décrite par GD, mais ſeulement de la partie décrite par GH, que nous allons démontrer égale à la ſurface du cone décrite par la tangente EF.

54. Remarquez que les trois lignes GI, HN & CD qui ſont ſuppoſées perpendiculaires à l'axe AB, ſont

nécéſſairement paralleles entr'elles (Liv. I. Art. 96.), & que la tangente GD & l'axe AB ſont auſſi des lignes paralleles, parce qu'elles ſont perpendiculaires au rayon CD.

55. On peut encore remarquer qu'on a prolongé la tangente EF & l'axe AB juſqu'au point K, où ces lignes ſe rencontrent, afin de faire voir ſenſiblement que la ligne KF décrit en tournant avec la demi-circonférence la ſuperficie d'un cone circonſcrit à la ſphere, & que par conſéquent la tangente EF décrit la ſurface d'un cone tronqué.

LEMME II.

56. *La ſurface du cone tronqué circonſcrit, décrite par la tangente* EF, *eſt égale à la ſurface du cylindre de même hauteur, décrite par* GH.

DEMONSTRATION.

Après avoir encore tiré le rayon CS & la ligne SMO perpendiculaire à l'axe AB, & par conſéquent parallele aux deux autres GI & HN, on a les deux triangles CMS & FLE, que je dis être ſemblables : car l'angle M du premier eſt égal à l'angle L du ſecond, parce qu'ils ſont tous les deux droits : pareillement l'angle C ou SCA du premier, qui a pour meſure l'arc SA, eſt auſſi égal à l'angle EFL du ſecond ; parce que cet angle EFL eſt égal à l'angle ESO, à cauſe des paralleles HN & SO. Or l'angle ESO formé par une tangente & par une corde, a pour meſure SA, (Liv. I. Art. 129.) qui eſt la moitié de l'arc SAO ſoutenu par la corde SO ; donc il eſt égal à l'angle SCA, & par conſéquent les deux angles SCA & EFL ſont égaux ; donc les deux triangles CMS & FLE ſont ſemblables ; donc les côtez homologues ſont proportionnels : ces côtez homologues ſont CS & EF d'une part ; & de l'autre, SM & EL. On a donc la proportion CS . EF : : SM . EL. Or le rayon CS eſt

égal à l'autre rayon CD, & ce dernier rayon est égal à la ligne HN, parce que ce sont deux perpendiculaires entre les paralleles GD & AB : d'ailleurs la ligne EL est égale à GH ; donc au lieu de la proportion précedente, on aura HN . EF : : SM . GH, & *alternando*, HN . SM : : EF . GH. Mais à la place de HN & SM, on peut prendre les circonférences dont ces lignes sont les rayons, lesquelles sont en même raison ; ainsi en marquant ces circonférences en cette maniere OHN & OSM, on aura encore la proportion OHN . OSM : : EF . GH ; donc le produit des extrêmes GH × OHN est égal au produit des moyens EF×OSM. Or le premier produit est égal à la surface cylindrique décrite par GH (24) ; & le produit des moyens est égal à la surface du cone décrite par la tangente EF (46), puisque le point S étant le milieu de la ligne EF, la circonférence OSM est également éloignée des deux bases du cone tronqué ; donc ces deux surfaces sont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME I.

57. *La surface d'une sphere est égale à la superficie convexe du cylindre circonscrit.*

DÉMONSTRATION.

Soit la demi-circonférence ADB qui soit environnée Fig. 8.
de plusieurs tangentes S, S, S, &c. qui touchent la demi-circonférence, en sorte que le point de contingence de chacune soit également éloigné de ses extrêmitez : soit aussi la tangente EF égale & parallele à l'axe AB, si on conçoit que la demi-circonférence tourne autour de l'axe AB avec les petites tangentes S, S, S, & la ligne EF, on verra que les petites tangentes décriront des surfaces de cones tronquez, & que la ligne EF décrira la surface d'un cylindre circonscrit. Or si on tire les lignes *dc*, *dc*, *dc*, &c. qui passent par les ex-

trêmitez des tangentes, & qui soient perpendiculaires à l'axe AB & à la ligne parallele EF, ces perpendiculaires diviseront la ligne EF en plusieurs parties E*d*, *dd*, *dd*, &c. qui ont décrit en tournant avec la demi-circonférence des surfaces cylindriques, qui sont chacune égales aux superficies des cones décrites par les tangentes correspondantes; & par conséquent la surface cylindrique décrite par la ligne entiere EF, qui contient toutes les parties E*d*, *dd*, *dd*, &c. est égale à la somme des superficies décrites par les petites tangentes S, S, S. Mais si on suppose les tangentes infiniment petites, elles se confondront avec la demi-circonférence; ainsi elles décriront la surface de la sphere; & par conséquent la surface de la sphere est égale à la superficie convexe du cylindre circonscrit. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

58. La surface de la sphere est égale au produit de son diametre par la circonférence d'un grand cercle: car nous venons de faire voir que la surface de la sphere est égale à celle du cylindre circonscrit. Or pour avoir la surface du cylindre circonscrit, il faut multiplier (24.) la hauteur, qui est le diametre de la sphere, par la circonférence de la base, qui est aussi un grand cercle de la sphere; par conséquent pour avoir la surface de la sphere, il faut multiplier son diametre par la circonférence d'un de ses grands cercles.

COROLLAIRE II.

59. La surface de la sphere est quadruple d'un grand cercle: car pour avoir la surface d'un grand cercle, il faut multiplier le rayon par la moitié de la circonférence (Liv. II. Art. 142.), ou, ce qui revient au même, il faut multiplier la moitié du rayon ou le quart du diametre par la circonférence d'un grand cercle de la

ſphere. Mais on vient de démontrer que la ſurface de la ſphere eſt égale au produit du diametre entier par la circonférence d'un grand cercle; par conſéquent la ſurface d'un grand cercle de la ſphere, & celle de la ſphere même, ſont comme ces produits. Or ces produits ayant tous deux la circonférence d'un grand cercle pour une de leurs racines, ſont comme les autres racines, qui ſont le quart du diametre, d'une part & le diametre entier de l'autre; ainſi la ſurface du grand cercle eſt à celle de la ſphere, comme le quart du diametre eſt au diametre; donc la ſurface de la ſphere eſt quadruple d'un grand cercle.

COROLLAIRE III.

60. La ſuperficie convexe du cylindre circonſcrit, étant égale à la ſurface de la ſphere, elle doit contenir quatre grands cercles de la ſphere, auſquels, ſi on ajoûte les deux baſes du cylindre, qui ſont auſſi des grands cercles de la ſphere, la ſuperficie totale du cylyndre ſera égale à ſix grands cercles de la ſphere; ainſi la ſurface totale du cylindre, y compris les baſes, eſt à celle de la ſphere inſcrite, comme 6 eſt à 4, ou comme 3 eſt à 2 : mais dans la ſuite nous démontrerons (135.) que la ſolidité du cylindre eſt auſſi à celle de la ſphere, comme 3 eſt à 2; par conſéquent la ſurface du cylindre, y compris les baſes, eſt à celle de la ſphere inſcrite, comme la ſolidité du cylindre eſt à la ſolidité de la ſphere.

Archimede ayant découvert ce que nous venons de démontrer ſur la ſurface du cylindre, & celle de la ſphere dans le Théorême & les Corollaires précedens, en fut ſi ſatisfait, & ſur-tout du troiſiéme Corollaire, qu'il voulut qu'on repréſentât ſur ſon tombeau un cylindre circonſcrit à une ſphere.

COROLLAIRE IV.

61. La surface de la sphere est égale à celle d'un cercle qui a pour rayon le diametre de la sphere, ou, ce qui revient au même, qui a un diametre double de celui de la sphere. Car la surface de la sphere est quadruple du grand cercle de la sphere, c'est-à-dire, du cercle qui a le même diametre que la sphere. Or le cercle qui a un diametre double de celui de la sphere, est aussi quadruple du cercle qui a même diametre que la sphere, puisque les cercles sont comme les quarrez des diametres.

COROLLAIRE V.

Fig. 9. 62. De ce que nous avons dit, il suit que la surface d'une calotte sphérique, telle que IAL, est égale à la superficie cylindrique dont la hauteur est égale à AX, qui est la hauteur de la calotte; ainsi pour avoir la surface d'une calotte sphérique, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphére par la hauteur de la calotte. Par la même raison, pour avoir la surface d'une zone, comme KILM, terminée par deux cercles paralleles, il faut multiplier sa hauteur XY par la circonférence d'un grand cercle de la sphere.

COROLLAIRE VI.

63. La surface d'une sphere est au quarré de son diametre, comme la circonférence est au diametre: car la surface de la sphere est égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle, & le quarré du diametre est le produit du diametre par le diametre. Or ces deux produits ont une racine commune; sçavoir, le diametre de la sphere: donc ils sont entr'eux comme les racines inégales, qui sont la circonférence, d'une part, & le diametre, de l'autre; par conséquent la surface d'une sphere est au quarré de son diametre, comme la circonférence est au diametre.

Digitized by Google

Il nous reste encore à parler du rapport des superficies des corps semblables ; c'est ce que nous allons faire.

DU RAPPORT DES SUPERFICIES des solides semblables.

71. Deux solides sont appellez *semblables*, lorsque les surfaces qui terminent l'un, sont semblables aux surfaces correspondantes de l'autre : par exemple, afin que deux prismes soient semblables, il faut que la base de l'un soit semblable à celle de l'autre, & que les faces du premier soient aussi semblables aux faces correspondantes du second. Afin donc que deux corps soient semblables, il n'est pas nécessaire que toutes les faces de l'un soient semblables entr'elles : mais il faut que les faces de l'un soient semblables aux faces correspondantes de l'autre, chacune à chacune.

72. Il suit de-là, que deux corps ne peuvent être semblables, à moins qu'ils ne soient de même espece ; ainsi, par exemple, un prisme ne peut pas être semblable à une pyramide ; un prisme droit à un prisme oblique, un prisme oblique à un autre prisme oblique, plus ou moins incliné, un prisme triangulaire à un prisme pentagonal, &c. En un mot, afin que deux corps soient semblables, il faut qu'ils ayent la même figure, & qu'ils ne different entr'eux, que parce que l'un a plus de solidité que l'autre.

73. Remarquez que lorsque deux corps sont semblables, les lignes tirées dans l'un de ces corps sont proportionnelles aux lignes correspondantes, ou semblablement tirées dans l'autre, en sorte que si dans le premier corps une de ces lignes est double ou triple de la correspondante dans le second, les autres lignes du premier seront aussi doubles ou triples de leurs correspondantes dans le second : par exemple, si deux cylindres sont semblables, les hauteurs sont proportionnelles aux

circonférences des bases ou à leurs rayons : c'est la même chose dans deux cones. Cette remarque est la même que celle que nous avons faite sur les polygones semblables (Liv. II. Art. 68.)

THEOREME.

74. *Lorsque deux corps sont semblables, les superficies sont en raison doublée des lignes correspondantes, ou comme les quarrez de ces lignes.*

On parle ici des superficies ou des surfaces totales, c'est-à-dire, qu'on y comprend les bases & les faces des corps.

DEMONSTRATION.

Si on conçoit que ces surfaces totales soient développées, il est évident que les développemens seront des figures semblables. Or les figures semblables (Liv. II. Art. 179.) sont entr'elles en raison doublée des lignes correspondantes, ou comme les quarrez de ces lignes ; par conséquent les surfaces totales des corps semblables, sont en raison doublée des lignes correspondantes ou comme les quarrez de ces lignes.

Autre démonstration en lettres. Les produisans de la superficie du premier corps soient appellez A & B, & ceux de la surface du second *a* & *b* ; on aura la proportion, A . *a* :: B . *b* ; parce que ces surfaces étant développées offrent des figures semblables, & d'ailleurs les produisans des figures semblables sont proportionnels (Liv. II. Art. 161.) Ainsi en prenant le produit des antécédens & celui des conséquens, ces produits AB & *ab* sont en raison doublée des produisans homologues (Liv. II. Art. 156.) Or ces produits représentent les superficies des corps semblables. Par conséquent ces superficies sont entr'elles en raison doublée des produisans homologues. Mais ces produisans sont proportionnels aux

lignes correſpondantes (Liv. II. Art. 162.) Donc les ſurfaces ſont en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrez de ces lignes.

COROLLAIRE.

75. Les ſpheres étant des corps ſemblables, les ſuperficies de deux ſpheres ſont en raiſon doublée des diametres, ou comme les quarrez des diametres. Voici une démonſtration particuliere de ce Corollaire : ſelon le premier Corollaire du premier Théorême, la ſurface de la prémiere ſphere eſt égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle de cette ſphere, ou, ce qui eſt la même choſe, à un rectangle qui a pour hauteur le diametre, & pour baſe la circonférence d'un grand cercle : pareillement la ſurface de l'autre ſphere eſt égale à un rectangle qui a pour hauteur le diametre, & pour baſe la circonférence d'un grand cercle de cette ſeconde ſphere. Or ces deux rectangles ſont ſemblables, puiſque les hauteurs qui ſont des diametres, ſont comme les circonférences qui ſervent de baſes aux rectangles : par conſéquent les deux rectangles ſont en raiſon doublée des diametres, qui ſont les hauteurs, ou comme les quarrez de ces diametres (Liv. 2. Art. 160 & 171); ainſi les ſurfaces des ſpheres ſont auſſi en raiſon doublée de leurs diametres, ou comme les quarrez de leurs diametres.

PROBLEME.

76. *Trouver la ſurface d'une ſphere dont on connoît le diametre.*

Cherchez la circonférence d'un grand cercle de la ſphere par le moyen du rapport approché du diametre à la circonférence trouvé par Archimede : enſuite multipliez la circonférence par le diametre, le produit ſera la ſurface de la ſphere : par exemple, ſi le diametre eſt

de 300 pieds, il faut chercher la circonférence qui est $942\frac{6}{7}$ pieds, laquelle étant multipliée par 300, donnera au produit 282857 pieds quarrez, plus $\frac{1}{7}$ d'un pied quarré. Ce produit est à peu-près la surface de la sphere dont le diametre est de 300 pieds.

Si on avoit supposé le rapport du diametre à la circonférence égal à celui de 113 à 355, on auroit trouvé d'abord $942\ \frac{54}{113}$ pour la circonférence d'un grand cercle du globe; laquelle étant multipliée par le diametre 300, le produit auroit été $282743\ \frac{41}{113}$. Ce produit approche plus de la surface du globe, que le premier produit $282857\frac{1}{7}$.

77. Le produit qu'on trouve en se servant de l'un & de l'autre rapport est plus grand que la surface qu'on cherche, parce que le diametre étant supposé de 7, la circonférence est moindre que 22; & pareillement le diametre étant supposé de 113, la circonférence est un peu moindre que 355 : cela vient de ce que le rapport de la circonférence au diametre est plus petit que celui de 22 à 7, & même que celui de 355 à 113.

78. On peut encore trouver la surface d'une sphere par une autre méthode fondée sur ce que nous venons de démontrer (75), sçavoir, que les quarrez des diametres des spheres sont comme leurs surfaces.

Cette méthode suppose que l'on connoît la surface d'une sphere, par exemple, celle du globe dont le diametre est de 100 pieds. On trouvera en se servant du rapport du 113 à 355, que la circonférence du grand cercle de ce globe est $314\ \frac{18}{113}$. Or si on multiplie ce nombre par le diametre 100, le produit sera $31415\ \frac{105}{113}$. Ainsi la surface de la sphere qui a 100 pieds de diametre, est à peu de chose près, $31415\ \frac{105}{113}$ pieds quarrez : mais comme la fraction $\frac{105}{113}$ est presque égale à l'unité,

l'unité, nous prendrons 31416 au lieu de 31415 $\frac{105}{113}$, afin d'éviter le calcul des fractions.

Cela posé, si on veut trouver la surface d'une sphere qui a, par exemple, 300 pieds de diametre, il faut faire une proportion dont le premier terme soit 10000, quarré de 100 qui est le diametre de la sphere dont on connoît la surface, le second soit 90000, quarré du diametre de la sphere dont on cherche la surface, & le troisiéme soit 31416, qui est la surface de la sphere dont le diametre est de 100 pieds; le quatriéme terme sera la surface cherchée: voici la proportion, 10000. 90000 :: 31416. x=282744.

79. Ce nombre 282744 est un peu plus grand que la surface qu'on cherche: mais si au lieu du 3$^{me.}$ terme 31416 on avoit pris 31415, le 4$^{me.}$ terme auroit été trop petit, & plus different de la veritable surface cherchée que le nombre 282744, parce que 31416 approche plus de la superficie du globe dont le diametre est 100, que 31415.

80. On peut aussi chercher la surface d'une sphere par une proportion dont les deux premiers termes soient deux nombres qui expriment à peu-près le rapport du diametre à la circonférence, tels que sont 113 & 355, & le 3$^{me.}$ soit le quarré du diametre de la sphere dont on cherche la surface. Ainsi pour trouver la surface de la sphere dont le diametre est 300, je ferai la proportion 113. 355 :: 90000. x: le 4$^{me.}$ terme qu'on trouvera, sera un peu plus grand que la surface cherchée, parce que le conséquent 355 est un peu trop grand, comme nous l'avons dit.

Voici la raison de cette méthode: Les quarrez des diametres sont entr'eux comme les surfaces des spheres. Ainsi le quarré de 113 est au quarré de 300, comme la surface de la sphere dont le diametre est 113 est à celle de la sphere dont le diametre est 300. Or le quarré

du diametre 113 est 113×113, le quarré du diametre 300 est 90000, & la surface de la sphere qui a pour diametre 113 est 355×113. (58) Voici donc la proportion, 113×113. 90000 : : 355×113. *x*, ou *alternando*, 113×113. 355×113 : : 90000. *x*. Or les deux premiers termes de cette proportion sont en même raison que 113 & 355, puisque ces deux termes sont les produits des nombres 113 & 355 multipliez l'un & l'autre par 113. On peut donc mettre ces nombres à la place des deux premiers termes : & pour lors la derniere proportion sera réduite à celle-ci, 113. 355 : : 90000. *x*.

81. Ces trois méthodes peuvent aussi servir à trouver la surface d'un cercle dont on connoît le diametre : car la superficie de la sphere est quadruple de celle d'un cercle qui a le même diametre que la sphere. Et par conséquent si après avoir trouvé la superficie de la sphere on en prend le quart, on aura la surface du cercle.

DES SOLIDES OU CORPS CONSIDEREZ selon leur solidité.

En traitant de la solidité des corps, nous parlerons 1°. De leur égalité, 2°. De leur mesure, 3°. De leur rapport.

DE L'EGALITE' DES SOLIDES.

82. De même que la surface est composée de lignes, le corps est aussi composé de surfaces, ou plûtôt de tranches d'une épaisseur infiniment petite : par exemple, le prisme est composé d'une infinité de tranches égales & paralleles à la base ; ce sont ces tranches qu'on nomme *élemens des solides*.

En comparant deux corps, nous supposerons toûjours que les élémens de l'un ont une hauteur ou épaisseur égale à celle des élémens de l'autre.

83. Nous avons fait voir en parlant des surfaces, qu'en multipliant une ligne par une autre, le produit donne une surface : mais si on multiplie une surface par une ligne, le produit est un solide : par exemple, si on multiplie la base d'un prisme par sa hauteur, c'est-à-dire, si on prend la base du prisme autant de fois qu'il y a de points dans sa hauteur, le produit sera le prisme.

84. Si on consideroit la surface sans aucune épaisseur, une infinité de surfaces posées les unes sur les autres, ne pourroit produire une solidité. C'est pourquoi on regarde ici la surface comme ayant une épaisseur ou hauteur infiniment petite ; & à proprement parler, c'est plûtôt une tranche qu'une surface.

85. Lorsqu'on dit que deux corps ou solides sont égaux, cela s'entend toûjours de leur solidité, en sorte que deux corps qui ont des figures & des superficies différentes sont cependant appellez égaux, si la solidité du premier est égale à celle du second : pour s'exprimer avec plus de précision ; on dit quelquefois que les corps sont égaux en solidité, mais cela n'est pas necessaire.

86. Avant de passer aux Théorêmes suivans, il est à propos de remarquer, que c'est la même chose de dire que deux corps ont une même hauteur, ou qu'ils sont compris entre deux plans paralleles ; en sorte que quand deux corps ont des hauteurs égales, ils peuvent toûjours être compris entre deux plans paralleles ; & réciproquement lorsque deux corps peuvent être compris entre des plans paralleles, ils ont des hauteurs égales.

THEORÊME I.

87. *Deux prismes de même base & de même hauteur sont égaux, soit qu'il y en ait un droit & l'autre oblique, soit que tous les deux soient droits ou obliques.*

DEMONSTRATION.

Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont le même nombre d'élemens égaux. Or deux prismes de même base & de même hauteur, ont un même nombre d'élemens égaux. 1°. Ils ont des élemens égaux, puisque les bases sont supposées égales. 2°. Le nombre de ces élemens est égal dans les deux prismes, à cause qu'ils ont même hauteur : donc les deux prismes sont égaux en solidité. Ce qu'il falloit démontrer.

88. On voit aisément que la même démonstration peut être appliquée à deux cylindres de même base & de même hauteur ; & même si on compare un prisme avec un cylindre, on démontrera de la même maniére, qu'ils sont égaux, lorsqu'ils ont des bases & des hauteurs égales.

89. Il paroît d'abord difficile à comprendre qu'un cylindre droit soit égal à un cylindre oblique de même base & de même hauteur : car le cylindre oblique est plus long que le cylindre droit ; d'ailleurs s'ils ont même base, ne sont-ils pas nécessairement de pareille grosseur ? ainsi le cylindre oblique a plus de solidité que l'autre.

Il est vrai que les cylindres ayant même hauteur, l'oblique est plus long que le droit ; mais aussi il a moins de grosseur, quoique les bases soient supposées égales, parce que la base ne mesure pas la grosseur, lorsque le contour n'est pas perpendiculaire à la base, puisque la grosseur est d'autant moindre, que le contour est plus oblique sur la base. Il faut juger des cylindres comme des parallelogrammes dont la base demeurant la même, la largeur est d'autant moindre, que les côtez sont plus obliques sur la base. Il faut dire la même chose du prisme droit comparé au prisme oblique.

THEOREME II.

90. *Deux pyramides de même base & de même hauteur sont égales, soit qu'il y en ait une droite & l'autre oblique, soit que toutes les deux soient droites ou obliques.*

DEMONSTRATION.

Soient les pyramides de la Fig. 10. que l'on suppose Fig. 10.
de même base & de même hauteur; je dis qu'elles sont égales. Il n'y a qu'à faire voir qu'il y a autant d'élemens dans l'une que dans l'autre, & que les élemens de l'une sont égaux aux élemens correspondans de l'autre. 1°. Il y a même nombre d'élemens dans les deux pyramides, parce qu'elles sont supposées avoir des hauteurs égales. 2°. Les élemens de l'une sont égaux aux élemens correspondans de l'autre : car supposons que ces pyramides soient entre deux plans paralleles, & qu'elles soient coupées par un troisiéme plan parallele aux deux premiers, lequel forme les sections ou les surfaces correspondantes *g* & *h*. Voici comme nous démontrerons que ces surfaces ou tranches correspondantes sont égales : à cause du troisiéme plan parallele, les deux côtez AB & A*b* de la premiere pyramide sont proportionnels aux côtez DE & D*e* de la seconde ; ainsi on a la proportion AB. A*b* : : DE. D*e*. Mais dans la premiere pyramide les deux triangles semblables BAC & *b*A*c* donnent la proportion AB. A*b* : : BC. *bc* : pareillement dans la seconde pyramide DE. D*e* : : EF. *ef*. Or dans la seconde & la troisiéme proportion les deux premieres raisons sont égales, comme il paroît par la premiere proportion : donc les deux dernieres raisons sont aussi égales ; c'est-à-dire, qu'on a la quatriéme proportion BC. *bc* : : EF. *ef* ; par conséquent les quarrez de ces lignes sont encore proportionnels ; ainsi $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: \overline{EF}^2 . \overline{ef}^2$. Or

la base G & la tranche g de la premiere pyramide sont des polygones semblables ; par conséquent ces figures sont comme les quarrez des côtez homologues (Liv. 2. Art. 179.) ; donc on a la proportion $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: G . g$. Par la même raison dans la seconde pyramide $\overline{EF}^2 . \overline{ef}^2 :: H . h$. Dans ces deux dernieres proportions les premieres raisons sont égales, à cause de la proportion précédente $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: \overline{EF}^2 . \overline{ef}^2$; donc les secondes raisons sont aussi égales ; ainsi $G . g :: H . h$, & *alternando*, $G . H :: g . h$; c'est-à-dire, que les deux bases sont comme les tranches correspondantes : ainsi, puisque les bases sont égales, les tranches le sont aussi : donc dans les pyramides de même base & de même hauteur, les élemens correspondans sont égaux. D'ailleurs il y a autant d'élemens dans l'une que dans l'autre ; & par conséquent ces pyramides sont égales en solidité. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici en peu de mots à quoi se réduit cette démonstration. Les deux pyramides ont chacune un égal nombre d'élemens, puisqu'elles ont même hauteur. D'ailleurs les élemens de l'une sont égaux aux élemens correspondans de l'autre : car ces élemens correspondans étant à égale distance des bases, ils ont le même rapport à ces bases, & en sont par conséquent des parties semblables. Or les bases sont supposées égales. Donc leurs parties semblables sont aussi égales. Donc les élemens correspondans sont égaux. Par conséquent les pyramides sont égales.

91. Remarquez qu'il n'est pas nécessaire pour la vérité du Théorême, que les bases des deux pyramides soient des polygones d'un même nombre de côtez ; il suffit que ces bases soient égales en surface, quoique l'une soit, par exemple, un exagone, & l'autre un pentagone régulier ou irrégulier.

92. Il suit de-là que les cones de même base & de

Digitized by Google

même hauteur sont égaux ; parce que les cones ne sont que des pyramides dont les bases sont des polygones réguliers d'une infinité de côtez.

93. Si on compare une pyramide avec un cone, on peut assurer que ces solides sont égaux lorsqu'ils ont même base & même hauteur. Cela est évident par rapport aux pyramides & aux cones, comme par rapport aux prismes & aux cylindres.

Il est presque impossible d'entendre bien la démonstration du Théorême suivant, sans avoir un prisme triangulaire divisé en trois pyramides, telles qu'on les suppose dans la démonstration ; c'est pourquoi si on n'en a point, il faut en faire un de cire ou de quelque autre matiere qui soit facile à couper.

THEOREME III.

94. *Une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur que la pyramide.*

DEMONSTRATION.

Soit le prisme triangulaire CADEBF ; je dis qu'une pyramide de même base & de même hauteur, n'est que le tiers de ce prisme. Ce que je démontre ainsi : Si on conçoit un plan qui coupe le prisme par l'angle A, en sorte qu'il passe par les diagonales AE & AF, la section formera la pyramide EAFB, qui a la même base que le prisme, sçavoir, le triangle EBF, & qui a aussi la même hauteur, puisqu'elle a le même côté AB. Pareillement si on conçoit qu'un plan coupe le reste du prisme par l'angle F, en passant par les diagonales FA & FC, il en résultera deux autres pyramides, dont l'une est AFCD, qui a pour base le triangle CAD, qui est l'autre base du prisme, & qui a aussi même hauteur que le prisme, puisqu'elle a le même côté DF. L'autre pyramide qui résulte de la derniere section est ECAF, dont Fig. 11.

la figure eſt fort irréguliere. Or les deux premieres pyramides EAFB & AFCD ſont de même baſe & de même hauteur, puiſqu'elles ont chacune même baſe & même hauteur que le priſme: donc ces deux pyramides ſont égales entr'elles: d'ailleurs ſi on compare la ſeconde pyramide AFCD avec la troiſiéme ECAF, & qu'on prenne pour baſe de la ſeconde, le triangle FDC, & pour baſe de la troiſiéme le triangle CEF, on trouvera que ces deux pyramides ſont égales: car 1°. Les triangles qu'on a pris pour baſe ſont égaux, puiſque ce ſont des moitiez du parallelogramme CEFD, qui eſt une des faces du priſme, & qui a été diviſée également par la diagonale CF. 2°. Ces deux pyramides ont même hauteur, puiſqu'elles finiſſent au même point A. Donc la troiſiéme pyramide eſt auſſi égale à la premiere: ainſi les trois pyramides ſont égales entr'elles; par conſéquent une de ces trois pyramides, par exemple, la premiere, qui a même baſe & même hauteur que le priſme, n'eſt que le tiers du priſme. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

95. Toute pyramide eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur: par exemple, une pyramide pentagonale eſt le tiers d'un priſme pentagonal de même baſe & de même hauteur.

DEMONSTRATION.

Si d'un point pris dans la baſe du priſme, on conçoit des lignes tirées au ſommet des angles, qui diviſent le pentagone qui ſert de baſe, en cinq triangles, & que le priſme pentagonal ſoit diviſé en cinq priſmes triangulaires, qui aient chacun pour baſe un des triangles du pentagone: ſi on conçoit de même que le pentagone qui eſt la baſe de la pyramide, eſt diviſé en cinq triangles parfaitement égaux à ceux de la baſe du priſme, &

que la pyramide pentagonale eſt partagée en cinq pyramides triangulaires de même hauteur que la pyramide pentagonale, qui aient chacune pour baſe un des triangles du pentagone, pour lors chacune des pyramides triangulaires ſera le tiers du priſme triangulaire correſpondant, comme on l'a démontré dans le Théorême; par conſéquent la pyramide pentagonale qui eſt la ſomme des cinq pyramides triangulaires, eſt le tiers du priſme pentagonal, ou de la ſomme des cinq priſmes triangulaires. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit clairement que la même démonſtration peut s'appliquer à toute pyramide, quelle que ſoit la baſe, en la comparant avec un priſme qui ait même baſe & même hauteur.

COROLLAIRE II.

96. Le cone n'étant qu'une pyramide dont la baſe eſt un polygone d'une infinité de côtez, & le cylindre n'étant qu'un priſme, il s'enſuit que le cone eſt le tiers du cylindre de même baſe & de même hauteur.

97. On peut remarquer à l'occaſion du premier Corollaire que la ſomme de pluſieurs priſmes de même hauteur eſt égale à un ſeul priſme dont la baſe eſt égale à celle de tous les autres priſmes pris enſemble, & la hauteur égale à celle de ces mêmes priſmes. Pareillement la ſomme de pluſieurs pyramides de même hauteur eſt égale à une ſeule pyramide dont la baſe eſt égale à la ſomme des baſes des autres pyramides, & la hauteur égale à celle de ces pyramides. Cela paroît aſſez clairement après tout ce qu'on a dit juſqu'ici.

Il eſt évident qu'on peut dire la même choſe des cylindres & des cones.

THEOREME IV.

98. *Une ſphere eſt égale à une pyramide ou à un cone qui a pour hauteur le rayon de la ſphere, & une baſe égale à la ſurface de la ſphere.*

DEMONSTRATION.

On peut concevoir que la ſphere eſt composée d'une infinité de pyramides qui ont leur ſommet au centre de la ſphere, & dont chacune a pour baſe une partie infiniment petite de la ſurface de la ſphere. Or la ſomme de toutes ces pyramides eſt égale à une ſeule pyramide ou à un cone, qui auroit une hauteur égale à celle de toutes les pyramides ; ſçavoir, le rayon de la ſphere, & dont la baſe ſeroit égale à la ſomme de toutes les baſes des pyramides (97), c'eſt-à-dire, égale à la ſurface de la ſphere : donc une ſphere eſt égale à une pyramide ou à un cone qui a pour hauteur le rayon, & pour baſe la ſuperficie de la ſphere. Ce qu'il falloit démontrer.

Après tout ce que nous venons d'établir ſur l'égalité des corps ſolides, on entendra facilement ce qu'il y a à dire ſur leur meſure ; c'eſt pourquoi nous en traiterons en peu de mots.

Des meſures des Corps ou Solides.

99. Les meſures des corps ſont des toiſes cubiques, des pieds cubiques, des pouces cubiques, &c. Une toiſe cubique eſt un cube compris ſous ſix faces, dont chacune eſt une toiſe quarrée. De même le pied cubique eſt un cube compris ſous ſix faces dont chacune eſt un pied quarré.

THEOREME.

100. *Les priſmes & les cylindres droits ou obliques ſont égaux au produit de leur baſe par leur hauteur.*

DEMONSTRATION.

Soit un priſme dont la baſe ait ſix pieds quarrez & la hauteur trois pieds en longueur ; je dis que la ſolidité de ce priſme eſt de 18 pieds cubiques. (18 eſt le produit de la baſe par la hauteur.)

Pour le démontrer, il faut concevoir que le prisme est partagé en autant de tranches paralleles à la base, qu'il y a de pieds dans la hauteur, c'est-à-dire, en trois dans cet exemple, dont chacune ait un pied de hauteur. Cela étant, il est évident que les trois tranches ayant la même base que le prisme, chacune contient autant de pieds cubiques que la base contient de pieds quarrez, c'est-à-dire, six; par conséquent les trois tranches prises ensemble contiennent trois fois six ou dix-huit pieds cubiques : donc la solidité d'un prisme est égale au produit de sa base par sa hauteur. On peut appliquer la même démonstration au cylindre.

COROLLAIRE I.

101. Les pyramides & les cones sont égaux au produit de leur base par le tiers de leur hauteur. Cela suit de ce que les pyramides & les cones sont le tiers des prismes & des cylindres de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

102. La sphere est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon; car une sphere est égale à un cone qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere (98).

Ce que nous venons de dire sur la mesure des solides peut servir à trouver la solidité de tous les corps, parce qu'ils peuvent être réduits en pyramides, de même que les figures planes peuvent être réduites en triangles. Nous allons parler à present du rapport des solides.

DU RAPPORT DES SOLIDES considerez selon leur solidité.

103. Pour connoître le rapport des solides, on se sert des *produisans*. On entend par produisans d'un so-

lide des lignes qu'il faut multiplier pour avoir sa solidité.

104. Il y en a trois ; car d'abord on multiplie deux lignes l'une par l'autre, afin d'avoir une surface : ensuite il faut multiplier cette surface par une troisiéme ligne, & le produit est la solidité du corps. Par exemple, dans un prisme, tel qu'est celui de la Fig. 12, les deux premiers produisans sont la longueur CD, & la largeur BC, c'est-à-dire, les deux lignes qu'il faut multiplier pour avoir la base, & le troisiéme est la profondeur ou la hauteur AB du prisme.

105. Lorsqu'il s'agit d'une pyramide, le troisiéme produisant n'est pas la hauteur entiere, mais seulement le tiers de la hauteur, parce que pour avoir la solidité d'une pyramide, on ne multiplie la base que par le tiers de la hauteur. Il en est de même pour le cone.

106. On peut aussi ne considerer que deux produisans dans le solide ; sçavoir une surface telle qu'est la base du corps, & la ligne par laquelle on multiplie la surface, afin d'avoir la solidité du corps : dans ce cas on regarde la surface comme un seul produisant. Nous verrons que pour trouver le rapport des corps, il est quelquefois utile de ne considerer que deux produisans, & que d'autre fois il en faut considerer trois.

Pour entendre ce que nous dirons sur le rapport des solides, il faut se souvenir des raisons triplées : nous allons en répéter quelque chose.

107. Une raison triplée est celle qui est composée de trois raisons égales, ou, ce qui est la même chose, c'est le produit de trois raisons égales. Or pour avoir le produit de trois raisons, il faut multiplier les trois antécedens l'un par l'autre, & multiplier de même les trois conséquens : par exemple, si on a les trois raisons égales $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, en multipliant les trois antécedens & les trois conséquens, on aura les produits 12

& 96, dont la raiſon $\frac{12}{96}$ eſt triplée des trois premieres.

108. Afin qu'une raiſon ſoit triplée, il n'eſt pas néceſſaire que les raiſons compoſantes ſoient exprimées par différens termes, elles peuvent être toutes trois exprimées par les mêmes termes; par exemple, au lieu des trois raiſons compoſantes $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, on auroit pû prendre les ſuivantes $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$, dont la raiſon triplée eſt $\frac{27}{216}$.

109. De-là il ſuit que la raiſon qui eſt entre deux cubes eſt triplée de celle qui eſt entre les racines : par exemple, la raiſon des cubes 27 & 216 eſt triplée de celle des racines 3 & 6. De même la raiſon des cubes b^3 & d^3 eſt triplée de celle des racines b & d. La maniere la plus ordinaire de s'énoncer pour exprimer cette proprieté des cubes, eſt de dire que les cubes ſont en raiſon triplée des racines.

Avant de propoſer les Théorêmes qui regardent le rapport des corps ſolides, il faut expoſer ici un Lemme pareil à celui que nous avons démontré ſur les polygones ſemblables (Liv. II. Art. 160. & 161).

LEMME.

110. *Lorſque deux corps ſont ſemblables, les trois produiſans de l'un ſont proportionnels aux trois produiſans homologues de l'autre; enſorte que ſi on appelle les trois produiſans du premier*, A, B, C, *& les trois produiſans du ſecond*, *a*, *b*, *c*, *on aura les proportions* A.*a*::B.*b*::C.*c*.

Cette propoſition ſe démontre de la même maniere que nous avons prouvé (Liv. II. Art. 160. & 161.) que deux polygones ſemblables quelconques ont leurs produiſans proportionnels. Suppoſons donc deux corps ſemblables, par exemple, deux globes; je dis que quoique l'on ne ſçût pas quels ſont leurs produiſans, il eſt cependant évident que les produiſans de l'un ſont des lignes correſpondantes aux produiſans de l'autre; & par

conséquent les produisans du premier sont proportionnels à ceux du second (73.) : en sorte que si les trois produisans d'un globe sont la circonférence d'un de ses grands cercles, le diametre & le tiers du rayon, les trois produisans de l'autre globe sont aussi la circonférence d'un de ses grands cercles, le diametre & le tiers du rayon. Il en est de même de tous les corps semblables réguliers ou irréguliers.

111. Remarquez que les produisans de deux corps semblables étant des lignes correspondantes, ou, ce qui est la même chose, des lignes semblablement tirées, il s'ensuit que dans deux corps semblables les produisans sont proportionnels à toutes les lignes semblablement tirées : c'est-à-dire, qu'un produisant d'un corps est au produisant homologue de l'autre, comme une ligne du premier est à une ligne semblablement tirée du second. Tout cela étant présupposé, nous allons d'abord considerer les solides, comme ayant seulement deux produisans.

Si on ne considere que deux produisans dans les solides, sçavoir, la base & la hauteur, ce que nous avons dit des surfaces, en parlant de leur rapport, convient aussi aux solides ; c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de nous étendre beaucoup.

THEOREME I.

112. *Les prismes sont entr'eux comme les produits de leur base par leur hauteur.*

DEMONSTRATION.

Si l'on prend deux prismes, le premier est égal au produit de sa base par sa hauteur ; & de même le second est égal au produit de sa base par sa hauteur : par conséquent le premier prisme est au second, comme le produit de la base du premier par sa hauteur, est au produit de la base du second par sa hauteur.

COROLLAIRE I.

113. Les prismes qui ont des bases égales, sont comme leurs hauteurs : car lorsque des produits composez de deux racines en ont une commune, ils sont entr'eux comme les racines inégales. Or les prismes sont supposez ici avoir une racine commune, sçavoir, la base : donc ils sont entr'eux comme les hauteurs qui sont les racines inégales.

COROLLAIRE II.

114. Les prismes qui ont des hauteurs égales, sont comme les bases. C'est la même démonstration que celle du Corollaire précedent.

COROLLAIRE III.

115. Lorsque la hauteur & la base d'un prisme sont réciproques à la hauteur & à la base d'un autre prisme, c'est-à-dire, lorsque la hauteur du premier prisme est à la hauteur du second, comme la base du second est à la base du premier, pour lors les deux prismes sont égaux : car, dans ce cas, le premier prisme est égal au produit des extrêmes de la proportion, & le second est égal au produit des moyens ; par conséquent les deux prismes sont égaux.

THEOREME II.

116. *Les prismes sont en raison composée de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.*

DEMONSTRATION.

Si on compare la base du premier prisme à celle du second, & qu'on compare de même la hauteur du premier à la hauteur du second, on aura deux raisons dont la base & la hauteur du premier prisme seront les antécedens, & la base & la hauteur du second seront les conséquens. Or le premier prisme est égal au produit des deux antécedens, & le second est égal au produit des conséquens ; ainsi la raison de ces deux prismes est composée des raisons de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

COROLLAIRE I.

117. Lorſque les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs, en ſorte que la baſe de l'un eſt à la baſe de l'autre, comme la hauteur du premier eſt à la hauteur dn ſecond, pour lors les priſmes ſont en raiſon doublée de leurs baſes ou de leurs hauteurs : car dans ce cas les raiſons compoſantes étant égales, la raiſon des priſmes qui eſt compoſée de ces raiſons égales, eſt néceſſairement doublée.

COROLLAIRE II.

118. Lorſque les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs, comme dans le premier Corollaire, les priſmes ſont comme les quarrez des hauteurs : car on vient de faire voir, que dans ce cas la raiſon des priſmes eſt doublée de celle des hauteurs. Or la raiſon des quarrez des hauteurs eſt auſſi doublée de celle des hauteurs ; par conſéquent la raiſon des priſmes eſt pour lors égale à celle des quarrez des hauteurs.

119. Il eſt clair que ce que l'on vient de dire des priſmes dans les deux Théorêmes précedens & leurs Corollaires, convient auſſi aux cylindres, ſoit qu'on compare les cylindres entr'eux, ſoit qu'on les compare avec des priſmes.

120. Les pyramides étant le tiers des priſmes de même baſe & de même hauteur, elles ſont comme ces priſmes : & par conſéquent tout ce que l'on vient de dire dans les deux Théorêmes & leurs Corollaires, convient aux pyramides. Il en eſt de même des cones comparez entr'eux ou avec les pyramides ; puiſqu'ils ſont le tiers des cylindres de même baſe & de même hauteur, comme les pyramides ſont le tiers des priſmes. On peut donc dire, par exemple, que les pyramides qui ont même baſe ou des baſes égales ſont entr'elles comme leurs hauteurs, & que celles qui ont même hauteur ſont comme leurs baſes. C'eſt la même choſe pour les cones.

Nous

Nous allons parler à présent des rapports que l'on peut connoître en considerant les trois produisans des solides.

THEOREME III.

121. *Deux solides sont en raison composée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Si on prend deux solides, par exemple, deux prismes, on peut considerer les trois produisans de l'un comme les antécedens de trois raisons, dont les produisans correspondans de l'autre sont les conséquens. Or le premier prisme est égal au produit des trois antécedens, & le second prisme est égal au produit des conséquens : donc la raison de ces deux prismes est composée des trois raisons des produisans de l'un aux produisans de l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

122. Si les trois produisans d'un solide sont proportionnels aux trois produisans d'un autre solide, ces corps sont en raison triplée des produisans du premier à ceux du second : car on vient de démontrer que la raison de deux solides est composée des trois raisons des produisans de l'un aux produisans de l'autre. Or on suppose dans ce Corollaire que ces trois raisons sont égales ; ainsi la raison des deux solides est triplée, puis qu'elle est composée de trois raisons égales.

123. Remarquez qu'au lieu de dire que les solides dont les produisans sont proportionnels, sont en raison triplée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre, on pourroit dire, que ces solides sont en raison triplée d'un produisant d'un solide au produisant correspondant de l'autre : car les trois rapports des produisans du premier solide aux produisans du second étant égaux, la raison triplée de ces trois rapports est la même chose que la raison triplée d'un seul (108).

COROLLAIRE II.

124. Si les trois produisans d'un solide sont encore supposez proportionnels aux trois produisans d'un autre solide, ces deux corps sont entr'eux comme les cubes des produisans correspondans, par exemple, des hauteurs : car par le Corollaire précédent & sa remarque, la raison de deux corps qui ont les produisans proportionnels est triplée du rapport des produisans correspondans, par exemple, des hauteurs. Or la raison qui est entre les cubes des hauteurs est aussi triplée du rapport des hauteurs (109) : donc la raison qui est entre deux corps dont les produisans sont proportionnels, est égale à celle des cubes des produisans correspondans.

COROLLAIRE III.

126. Les solides semblables sont en raison triplée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre : ils sont aussi entr'eux comme les cubes des produisans homologues. C'est une suite évidente des deux corollaires précedens, puisque les corps semblables ont les produisans homologues proportionnels (110).

COROLLAIRE IV.

127. Puisque les produisans correspondans de deux corps semblables sont proportionnels aux côtez homologues de ces corps, & généralement aux lignes semblablement tirées (111); il s'ensuit que les corps semblables sont en raison triplée des lignes semblablement tirées, ou comme les cubes de ces lignes.

COROLLAIRE V.

128. Les spheres sont en raison triplée de leurs diametres, ou comme les cubes des diametres. C'est une suite évidente du précedent Corollaire, parce que les spheres sont des corps semblables, & que d'ailleurs les diametres sont des lignes semblablement tirées. Si on veut une démonstration particuliere de ce Théorême, en voici une :

Nous avons vû que pour avoir la solidité d'une sphere, il faut multiplier la surface par le tiers de son rayon (102). Or la surface de la sphere est égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle (58.) ; donc les trois produisans de la sphere sont la circonférence d'un grand cercle, le diametre & le tiers du rayon. Si donc on compare deux spheres, il est évident que les produisans de l'une sont proportionnels aux produisans de l'autre ; par conséquent ces spheres sont entr'elles en raison triplée des diametres, ou comme les cubes des diametres : par exemple, si le diametre d'une sphere est d'un pied, & que le diametre d'une autre sphere soit de deux pieds, la premiere de ces spheres est à la seconde, comme 1 est à 8. (Ces deux nombres sont les cubes de 1 & 2.) De même si les diametres de deux spheres sont comme 3 & 5, ces spheres sont entr'elles comme les cubes de ces nombres, c'est-à-dire, comme 27 est à 125.

129. On peut voir par-là, quel est le rapport de la terre au Soleil, en supposant que l'on connoît le rapport de leurs diametres : car le diametre de la terre étant à celui du Soleil à peu-près comme 1 est à 100, il s'ensuit que la solidité de la terre est à celle du Soleil comme 1 est à 1000000, c'est-à-dire, que le Soleil est un million de fois plus gros que la terre. Pareillement le diametre de la terre étant presque à celui de la Lune, comme 4 est à 1, la terre est environ 64 fois plus grande que la Lune. Je dis environ, parce que le diametre de la terre n'étant pas tout-à-fait 4 fois plus grand que celui de la Lune, la terre n'est pas non plus 64 fois plus grande que la Lune.

Selon M. de la Hire dans ses tables astronomiques, le diametre de la terre est à celui de la Lune comme 121 est à 33, ou comme 11 est à 3 ; & par conséquent la terre est à la Lune comme le cube de 11 est au cube de 3 ; c'est-à-dire, qu'elle est à peu-près 49 fois plus

grosse que la Lune, en supposant ce rapport des diametres de la terre & de la Lune, dont se sert M. de la Hire.

130. Ce rapport des spheres paroît assez surprenant; nous allons ajoûter un autre exemple du rapport des corps semblables qui ne le paroîtra pas moins. Si on compare un pied cubique avec un pouce cubique, la hauteur du premier corps étant à celle du second, comme 12 est à 1, leurs soliditez seront entr'elles comme le cube de 12, qui est 1728, est au cube de 1: ainsi un pied cubique contient 1728 pouces cubiques.

131. Remarquez que dans la comparaison de deux spheres, il y a beaucoup de différence entre le rapport des circonférences des grands cercles; celui des surfaces de ces spheres & celui de leurs soliditez : car 1°. Les circonférences des grands cercles sont entr'elles comme les diametres. 2°. Les surfaces de ces spheres sont en raison doublée de leurs diametres, ou comme les quarrez de ces diametres. 3°. Enfin leurs soliditez sont en raison triplée, ou comme les cubes des mêmes diametres.

On auroit pû mettre dans ces rapports, les rayons à la place des diametres, parce que les rayons sont comme les diametres.

132. Il paroît par ce qu'on vient de dire que les surfaces des spheres, n'augmentent pas dans la même proportion que leurs soliditez; puisque les surfaces n'augmentent que comme les quarrez des diametres: au lieu que les soliditez croissent comme les cubes de ces diametres: supposons, par exemple, deux globes, dont l'un ait 10 pouces de diametre, & l'autre un pouce: la surface du premier sera seulement 100 fois plus grande que celle du second; parce que le quarré de 10 est 100 : mais le cube de 10 étant 1000, la solidité du premier globe sera 1000 fois plus grande que celle du second. Il faut dire la même chose de tous les corps

femblables, puifque leurs furfaces ne font entr'elles que comme les quarrez des lignes ou des côtez homologues, & que leurs folíditez font comme les cubes de ces mêmes lignes.

133. On peut conclure de-là que fi on compare des corps femblables, les gros ont moins de furface à proportion que les petits : ainfi le globe qui a 10 pouces de diametre, a moins de furface à proportion que celui qui n'a qu'un pouce : car afin que le premier globe eût autant de furface à proportion que le fecond, il faudroit que le premier ayant mille fois plus de folidité que l'autre, eût auffi mille fois plus de furface. Or il n'a cependant que cent fois plus de fuperficie que le fecond, comme on vient de le prouver.

134. Dans le Théorême fuivant, nous comparerons la folidité de la fphere avec celle du cylindre circonfcrit : c'eft par le moyen des produifans de l'un & l'autre corps, que nous démontrerons leur rapport. Nous avons déja les produifans de la fphere (128). Pour connoître ceux du cylindre circonfcrit, il faut faire attention que la folidité de ce cylindre eft égale au produit de fa bafe par fa hauteur, qui eft un diametre : d'ailleurs la bafe qui eft un grand cercle de la fphere eft égale (Liv. II. Art. 146.) au produit de la moitié de la circonférence par le rayon, ou ce qui eft la même chofe, au produit de la circonférence par la moitié du rayon ; par conféquent les trois produifans du cylindre circonfcrit, font la circonférence d'un grand cercle de la fphere, le diametre & la moitié du rayon.

THEOREME IV.

135. *La fphere eft au cylindre circonfcrit, comme 2 eft à 3, c'eft-à-dire, qu'elle eft les deux tiers du cylindre.*

Les Géometres expriment le rapport du cylindre à la fphere infcrite, en difant que le cylindre eft à la fphere en raifon *fefquialtere*; c'eft-à-dire, que le cylindre contient la fphere une fois & demi.

DEMONSTRATION.

Les trois produisans de la sphere sont, comme on l'a fait voir dans la démonstration du cinquiéme Corollaire, la circonférence d'un grand cercle, le diametre & le tiers du rayon : & les trois produisans du cylindre circonscrit, sont, comme on vient de le dire, la circonférence, le diametre & la moitié du rayon. Il y a donc deux produisans de la sphere, qui sont les mêmes que ceux du cylindre, sçavoir, la circonférence & le diametre ; par conséquent ces deux corps sont comme les produisans inégaux, c'est-à-dire, comme le tiers du rayon est à la moitié du rayon. Or si on double ces deux termes, le même rapport subsistera, & on aura les deux tiers du rayon, & le rayon entier ; ainsi la sphere est au cylindre circonscrit comme les deux tiers du rayon sont au rayon entier ; donc la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

136. La sphere est le double du cone qui a même base & même hauteur que le cylindre circonscrit, ou, ce qui est la même chose, qui a pour base un des grands cercles de la sphere, & pour hauteur le diametre : car on sçait que le cone n'est que le tiers du cylindre ; mais d'ailleurs on vient de faire voir que la sphere est les deux tiers du même cylindre ; donc la sphere est le double du cone.

THEOREME V.

137. *La sphere est au cube circonscrit comme la sixiéme partie de la circonférence est au diametre.*

DEMONSTRATION.

Les trois produisans de la sphere sont la circonférence, le diametre, le tiers du rayon ou la sixiéme partie du diametre : mais à la place de la circonférence entiere & de la sixiéme partie du diametre, on peut prendre le diametre entier, & la sixiéme partie de la cir-

conférence ; & pour lors les trois produisans de la sphere seront deux diametres, & la sixiéme partie de la circonférence : mais les produisans du cube circonscrit sont trois diametres ; la sphere & le cube ont donc deux produisans communs, sçavoir, deux diametres de part & d'autre ; par conséquent le premier de ces corps est au second, comme la sixiéme partie de la circonférence, qui est le troisiéme produisant de la sphere, est au diametre qui est le troisiéme produisant du cube.

Dans cette démonstration, à la place de la circonférence entiere & de la sixiéme partie du diametre, on a pris le diametre entier & la sixiéme partie de la circonférence ; & on a supposé que le produit étoit le même : c'est ce qui paroîtra d'abord en désignant ces grandeurs par des lettres. Car la circonférence soit $6a$ & le diametre $6b$, la sixiéme partie du diametre sera b ; par conséquent le produit de la circonférence par la sixiéme partie du diametre sera $6ab$: d'ailleurs la sixiéme partie de la circonférence sera a ; ainsi le produit du diametre par la sixiéme partie de la circonférence sera $6ba$, ou $6ab$. Donc ces deux produits sont égaux.

138. La circonférence étant au diametre à peu-près comme 22 à 7, ou comme 66 est à 21, la sphere est presque au cube circonscrit, comme la sixiéme partie de 66 est à 21, ou comme 11 est à 21.

Si on veut avoir un rapport plus approchant du véritable, il faut prendre celui de 333 à 106 ou de 666 à 212, qui est le même, parce que ces deux derniers nombres sont les produits des deux premiers multipliez par 2 : la sphere est donc au cube circonscrit au moins comme 111, qui est la sixiéme partie de 666 est à 212. J'ai dit *au moins*, parce que le rapport de 333 à 106 est un peu moindre que la raison de la circonférence au diametre : mais il en approche de bien près : car si on se servoit de ce rapport pour trouver la circonférence d'un cercle dont on connoît le diametre, il ne s'en faudroit

par la 37000me partie du nombre trouvé, que ce nombre n'égalât la circonférence cherchée : c'est-à-dire, que si on ajoûtoit au nombre trouvé la 37000me partie de ce nombre, la somme seroit plus grande que la circonférence.

140. On trouvera par la méthode de la démonstration précédente que le cylindre circonscrit à une sphere, est au cube circonscrit à la même sphere, comme la quatriéme partie de la circonférence est au diametre.

PROBLEME I.

146. *Trouver la solidité d'une sphere dont on connoît le diametre.*

Cherchez la surface de la sphere, comme on l'a enseigné (76) : ensuite multipliez cette surface par le tiers du rayon, le produit sera la solidité que l'on cherchoit (102) : par exemple, si le diametre d'une sphere est de 300 pieds, il faut chercher la surface que vous trouverez de 282857 pieds quarrez, plus $\frac{1}{7}$ en supposant le rapport de la circonférence au diametre égal à celui de 22 à 7. Si vous multipliez cette surface par 50, qui est le tiers du rayon, le produit sera 14142857 pieds cubiques, plus $\frac{1}{7}$ de pied cubique ; c'est à peu-près la solidité de la sphere, dont le diametre est de 300 pieds.

Si on avoit supposé le rapport du diametre à la circonférence, égal à celui de 113 à 355, on auroit trouvé d'abord 282743 $\frac{41}{113}$ pour la surface du globe, laquelle étant multipliée par 50, le produit auroit été 14137168 $\frac{16}{113}$: ce produit approche plus de la solidité du globe qui a 300 pieds de diametre que le premier produit 14142857 $\frac{1}{7}$.

On peut encore se servir d'une autre méthode pour trouver la solidité d'une sphere ; cette méthode est fondée sur ce que le rapport des spheres est égal à celui des cubes des diametres ; elle suppose que l'on connoît

la solidité de quelque sphere : par exemple, celle de la sphere, dont le diametre est de 100 pieds, que l'on trouve par la premiere méthode être de 523598 pieds cubiques plus $\frac{278}{339}$. (Je suppose qu'on se sert du rapport de 113 à 355.) Cela posé, afin de trouver la solidité d'une sphere de 300 pieds, il faut faire une proportion dont le premier terme soit 1000000 cube de 100, qui est le diametre de la sphere dont on connoît la solidité, le second soit 27000000 cube de 300, qui est le diametre de la sphere dont on cherche la solidité, & le troisiéme terme soit 523599, qui est la solidité de la sphere qui a 100 pieds de diametre. (Nous prenons 523599 au lieu de 523598 $\frac{278}{339}$, afin d'éviter le calcul des fractions.) Le quatriéme terme de cette proportion sera la solidité de la sphere dont le diametre est 300. Voici la proportion, 1000000. 27000000 :: 523599. 14137173 pieds cubiques. Ce quatriéme terme est un peu plus grand que 14137168 $\frac{16}{113}$ qu'on avoit trouvé d'abord, parce que l'on a pris 523599 pour troisiéme terme au lieu de 523598 $\frac{278}{339}$.

147. Remarquez que la solidité du globe qui a 300 pieds de diametre est moindre que 14142857 $\frac{1}{7}$; & même que 14137168 $\frac{16}{113}$, parce que le rapport de la circonférence au diametre est moindre que la raison de 22 à 7, & que celle de 355 à 113. Mais si dans la seconde méthode on avoit pris pour troisiéme terme de la proportion 523598 à la place de 523599, le quatriéme terme auroit été trop petit & plus différent de la vraie solidité qu'on cherche, qu'en prenant 523599; parce que ce nombre 523599 approche plus de la solidité du globe qui a 100 pour diametre, que le nombre 523598.

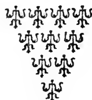
PROBLEME II.

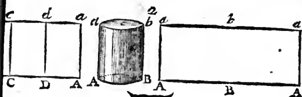
148. *Trouver la ſolidité d'un priſme, par exemple, d'un ouvrage de maçonnerie qui ait 16 toiſes 4 pieds 8 pouces de longueur, 2 toiſes 3 pieds d'épaiſſeur, & 7 toiſes 2 pieds de hauteur.*

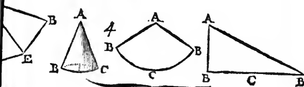
Réduiſez ces trois dimenſions à la plus petite eſpece qui eſt le pouce, lequel eſt contenu 12 fois dans le pied & 72 fois dans la toiſe, parce que la toiſe vaut ſix pieds, vous trouverez que la longueur eſt de 1208 pouces, l'épaiſſeur de 180 & la hauteur de 528. Après cette réduction, multipliez ces trois nombres l'un par l'autre, & vous trouverez au produit 114808320 pouces cubiques qui ſont la ſolidité du corps.

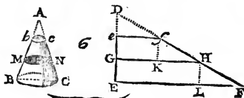
Si on veut ſçavoir combien ce nombre de pouces cubiques contient de toiſes cubes, il faut le diviſer par 373248, parce que ce dernier nombre étant le cube de 72, marque combien la toiſe cubique contient de pouces cubiques; on trouvera au quotient 307, & le reſte 221184 qu'il faut diviſer par 1728 cube de 12, afin d'avoir le nombre des pieds cubiques contenus dans ce reſte; le quotient de cette ſeconde diviſion ſera 128 ſans aucun reſte. Par conſéquent 114808320 pouces cubiques valent 307 toiſes cubes & 128 pieds cubes.

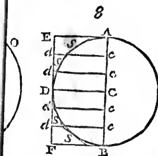
Fin des Elémens de Géometrie.

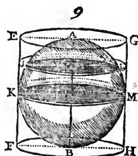


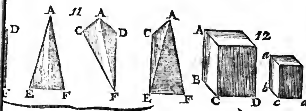

c
d
a
a
2
b
a
b
a
C
D
A
A
B
A
B
A


B
E
A
4
B
C
A
B
B
C
A
B
C
B


A
b
c
6
M
N
B
C
D
e
f
G
H
K
E
L
F


8
O
E
A
d
d
D
C
F
B


9
E
A
G
K
M
F
B
H


D
A
11
A
C
D
C
A
A
12
a
B
b
E
F
F
E
F
C
D
c
d



DE LA TRIGONOMETRIE.

LA Géométrie se divise en deux parties, qui sont la Géométrie *speculative* & la *pratique*. La premiere considere les différens rapports de l'étendue sans proposer aucune regle, soit pour tirer des lignes & faire certaines figures, soit pour mesurer l'étendue : la seconde, qui est la Géométrie pratique, donne ces sortes de regles,& démontre qu'elles sont infaillibles: la premiere consiste toute en Théorêmes ; la seconde ne propose que des Problêmes. On a traité ces deux parties dans les Elémens de Géométrie, en donnant des Théorêmes, & ensuite des Problêmes.

La Géométrie pratique contient trois parties : sçavoir, la *longimétrie*, la *planimétrie*, & la *stereométrie* ; la premiere enseigne à mesurer les lignes ; la seconde apprend à mesurer les surfaces ; & la troisiéme à mesurer les corps ou solides. Ce que nous avons dit dans les Elémens de Géométrie suffit pour la mesure des surfaces & des solides, en supposant qu'on connoît la longueur des différentes lignes qu'il faut multiplier pour avoir les surfaces & les soliditez : mais il est souvent nécessaire de recourir à la *Trigonométrie* pour connoître la longueur des lignes.

La Trigonométrie est une partie de la Géométrie, qui enseigne à connoître les côtez & les angles d'un triangle dont on connoît déja deux angles & un côté, ou deux côtez & un angle, ou enfin les trois côtez. Art. I.

2. Comme il y a des triangles sphériques & des triangles rectilignes, on divise la Trigonométrie en deux parties, dont l'une traite des triangles sphériques, on

l'appelle *Trigonométrie ſphérique*; & l'autre conſidere les triangles rectilignes, on l'appelle pour ce ſujet *Trigonométrie rectiligne*: la premiere regarde les Aſtronomes; la ſeconde eſt néceſſaire dans une infinité d'occaſions; c'eſt pourquoi nous allons en donner un Traité, ſans parler de la Trigonométrie ſphérique, qui n'eſt pas de notre deſſein.

Mais comme dans la Trigonométrie on ſe ſert des ſinus, des tangentes & des ſécantes, il eſt néceſſaire de traiter au long de ces lignes, dont nous n'avons donné que des notions très-courtes dans les Elémens de Géométrie; & après cela nous expliquerons d'une maniere générale, & par quelques exemples comment on peut trouver ces différentes meſures pour tous les angles & pour les arcs qui leur ſont égaux.

3. La méthode de trouver ces meſures; c'eſt-à-dire, les ſinus, les tangentes & les ſécantes des angles ou des arcs, s'appelle *conſtruction des tables des ſinus, des tangentes & des ſécantes*, parce qu'après avoir trouvé les ſinus des différens angles, on en a conſtruit des tables, dans leſquelles on a placé ces ſinus à côté des angles dont ils ſont la meſure. On a fait la même choſe par rapport aux tangentes & aux ſécantes.

4. Le ſinus d'un arc eſt une ligne tirée de l'extrémité de cet arc perpendiculairement ſur le rayon ou le diametre qui paſſe par l'autre extremité du même arc: cette ligne eſt auſſi le ſinus de l'angle meſuré par l'arc: par
Fig. 1. exemple, le ſinus de l'arc GA eſt la ligne GH tirée de l'extrémité G de cet arc perpendiculairement ſur le rayon CA, ou le diametre BA qui paſſe par l'autre extrémité A du même arc: cette ligne GH eſt auſſi ſinus de l'angle GCA dont l'arc GA eſt la meſure. De même la ligne EF eſt ſinus de l'arc EA & de l'angle ECA. Pareillement la ligne GL eſt ſinus de l'arc GD & de l'angle GCD.

5. Le ſinus de l'arc DA, qui eſt le quart de la circonférence, eſt le rayon DC tiré de l'extrémité D per-

pendiculairement sur le rayon CA qui passe par l'autre extremité A de l'arc. Le rayon DC est aussi le sinus de l'angle droit DCA mesuré par l'arc DA ; ainsi le sinus d'un angle droit est le rayon ; on l'appelle *sinus total.*

6. Remarquez que le sinus d'un angle est aussi sinus de son supplément : par exemple, GH est non-seulement sinus de l'angle GCA, mais aussi de l'angle GCB, qui est le supplément du premier. De même EF est sinus de l'angle ECA & de son supplément ECB. C'est la même chose pour les arcs qui sont les mesures de ces angles ; en sorte que GH est sinus de l'arc GA & du supplément GDB. Pareillement EF est sinus de EA & de EDB.

Cette remarque est une suite de la définition du sinus : car afin d'avoir le sinus de l'angle GCB ou de l'arc GDB, il faut tirer du point G, qui est l'extrémité de l'arc, une perpendiculaire sur le diametre AB, lequel passe par l'autre extrémité de l'arc. Or on ne peut tirer du point G d'autre perpendiculaire sur ce diametre que la ligne GH, qui est sinus de l'arc GA ; ainsi la perpendiculaire GH est sinus des deux arcs GA & GDB, ou des angles GCA & GCB, qui sont supplément l'un de l'autre.

7. Il paroît donc qu'un angle obtus n'a point d'autre sinus que celui de l'angle aigu qui est son supplément : & de même par rapport aux arcs, celui qui est plus grand qu'un quart de circonférence a le même sinus que l'arc qui est son supplément, lequel est moindre que le quart de la circonférence.

8. Le sinus d'un angle ou d'un arc étant prolongé jusqu'à la rencontre de la circonférence, il en résulte une corde, laquelle est perpendiculaire sur le rayon qui aboutit à l'extrémité de l'arc ; par exemple, si on prolongeoit la ligne GH, sinus de l'arc GA jusqu'à la rencontre de la circonférence, ce seroit une corde perpendiculaire au rayon CA. Or je dis que le sinus GH est la moitié de cette corde, & que l'arc GA est aussi la moi-

tié de l'arc ſoutenu par la corde ; car cette corde étant perpendiculaire au rayon CA par l'hypotheſe, le rayon lui eſt auſſi perpendiculaire, & par conſéquent la corde & l'arc ſont chacun coupez en deux parties égales (Liv. I. Art. 105) : donc le ſinus GH eſt la moitié de la corde, & l'arc GA eſt auſſi la moitié de l'arc ſoûtenu par la corde.

9. On peut donc dire que le ſinus d'un arc eſt la moitié d'une corde qui ſoûtient un arc double, par exemple, GH ſinus de l'arc GA eſt la moitié d'une corde qui ſoûtient un arc double de GA. Cette ſeconde définition du ſinus nous ſervira dans la ſuite.

10. Remarquez que le ſinus d'un arc moindre que le quart de la circonférence, devient d'autant plus grand que l'arc augmente : par exemple le ſinus de l'arc EGA eſt plus grand que celui de l'arc GA ; en ſorte que le ſinus du quart de la circonférence eſt plus grand que tous les autres ; c'eſt pour cela qu'on l'appelle ſinus total. Quant aux arcs qui ſurpaſſent le quart de la circonférence, il eſt viſible que ſi l'on compare deux de ces arcs, comme GDB & EDB, celui qui eſt le plus grand a un moindre ſinus : car ces arcs n'ont point d'autres ſinus, que ceux de leurs ſupplémens. Or le plus grand des deux arcs ; ſçavoir, GDB, a un moindre ſupplément que l'autre ; par conſéquent il a auſſi un plus petit ſinus ; ainſi lorſque les arcs ſurpaſſent le quart de la circonférence, les ſinus ſont d'autant plus petits que les arcs ſont plus grands. Tout cela doit être appliqué aux angles ; ainſi plus les angles aigus ſont grands, plus leurs ſinus ſont grands ; & au contraire plus les angles obtus ſont grands, plus leurs ſinus ſont petits.

11. Mais quoiqu'il ſoit vrai que plus un angle aigu ou l'arc qui en eſt la meſure eſt grand, plus auſſi ſon ſinus eſt grand ; cependant les ſinus n'augmentent pas dans la même raiſon que les angles aigus ou leurs arcs ; en ſorte que ſi un arc eſt double d'un autre, le ſinus

du premier n'eſt pas pour cela double de celui du ſecond : car nous avons remarqué (Liv. II. Art. 99.) que les cordes ne ſont pas proportionnelles aux arcs qu'elles ſoûtiennent. Or les ſinus ſont moitié des cordes ; par conſéquent les ſinus ne ſont pas proportionnels à leurs arcs ou à leurs angles.

12. Le ſinus dont nous avons parlé juſqu'à préſent, s'appelle *ſinus droit* ; on diſtingue encore une autre eſpece de ſinus qu'on appelle *ſinus verſe* : pour entendre ce que c'eſt que ce ſinus, il faut recourir à la premiere définition du ſinus droit : nous avons dit que le ſinus droit d'un arc étoit une ligne tirée de l'extrémité de l'arc perpendiculairement ſur le rayon ou le diametre qui paſſe par l'autre extrémité. Or ſi on prend ſur le diametre la partie compriſe entre le ſinus droit & l'arc, ce ſera le ſinus verſe de l'arc : par exemple, l'arc GA dont le ſinus droit eſt GH, a pour ſinus verſe la partie HA du diametre. De même le ſinus verſe de l'arc EGA & de l'angle ECA eſt la partie FA du diametre.

13. De-là il ſuit que le ſinus droit d'un arc de 90 degrez ou de l'angle droit, eſt égal à ſon ſinus verſe, parce que l'un & l'autre eſt rayon du cercle : par exemple, le ſinus droit de l'arc DA eſt le rayon DC, & ſon ſinus verſe eſt l'autre rayon CA.

14. Nous avons obſervé que le ſinus droit d'un angle aigu étoit auſſi le ſinus droit de l'angle obtus qui eſt ſon ſupplement : il n'en eſt pas de même du ſinus verſe : par exemple, le ſinus verſe de l'angle aigu GCA ou de ſon arc GA eſt HA : mais le ſinus verſe du ſupplément GCB ou de ſon arc GDB eſt la partie HB compriſe entre le ſinus droit & l'arc GDB.

Lorſqu'on parle du ſinus d'un angle ou d'un arc, ſans ſpécifier le ſinus droit ou le ſinus verſe, il faut toûjours entendre le ſinus droit.

Nous allons donner les notions des tangentes & des ſécantes.

Fig. 2. 15. Une ligne, comme AF, tirée perpendiculairement de l'extrémité du rayon CA & terminée de l'autre côté par le rayon prolongé CHF, est appellée *tangente* de l'arc AH compris entre ces deux rayons, ou de l'angle ACH; le rayon prolongé CHF, terminé par la tangente, est appellé *sécante* du même arc & du même angle. Pareillement AE est tangente de l'angle ACE, & de l'arc AG; & CE en est la sécante.

16. Pour avoir la tangente de l'angle droit ACD, il faudroit prolonger le rayon CD & la tangente AF, jusqu'à ce que ces deux lignes se rencontrassent : mais comme elles sont toutes les deux perpendiculaires au rayon CA, elles ne se rencontreroient jamais; c'est pourquoi la tangente d'un angle droit, ou de son arc est infinie. Par la même raison la sécante de l'angle droit est aussi infinie.

17. Comme le sinus d'un angle est aussi sinus de son supplément, de même la tangente d'un angle ou d'un arc est aussi tangente de son supplement; en sorte qu'un angle obtus, tel que HCB, n'a pas d'autre tangente que celle de l'angle aigu qui est son supplément. Il faut dire la même chose des sécantes.

Fig. 3. 18. Dans un triangle rectangle, comme CAB, si on prend un des côtez de l'angle droit pour rayon du cercle, l'autre côté de l'angle droit est la tangente de l'angle opposé, & l'hypotenuse est la sécante du même angle : par exemple, si on prend le côté BA pour rayon, ensorte qu'on conçoive un arc décrit du point B comme centre, & de l'intervalle du côté BA; il est évident que l'autre côté AC de l'angle droit est la tangente de l'angle B; & que l'hypotenuse BC est la sécante du même angle. Pareillement si on prend le côté CA pour rayon du cercle, & que l'on conçoive un arc decrit du point C, & de l'intervalle CA, l'autre côté AB sera la tangente de l'angle C, & l'hypotenuse CB sera la sécante du même angle.

19. Remarquez

19. Remarquez qu'il ne s'ensuit pas de ce que nous venons de dire que deux angles différens tels que B & C, aient la même sécante. Il est bien vrai que nous avons dit que l'hypotenuse BC ou CB étoit sécante de l'un & de l'autre de ces deux angles ; mais c'est en supposant différens rayons ; sçavoir, BA & ensuite CA. Or il est évident que si l'on suppose les deux lignes BA & CA divisées en un égal nombre de parties aliquotes, celles de BA seront plus petites que celles de CA, & par conséquent l'hypotenuse BC contiendra plus de parties du rayon BA, qu'elle n'en contiendra du rayon CA. C'est pourquoi la ligne BC aura un plus grand nombre de parties étant sécante de l'angle B, que si elle étoit sécante de l'angle C ; en sorte que si l'angle B est, par exemple, de 55 degrez, & l'angle C de 35 ; on trouvera en supposant le rayon divisé en 10000000 parties égales, que l'hypotenuse CB en contiendra 17434468 considerée comme sécante de l'angle B ; & qu'elle n'en contiendra que 12207746 étant regardée comme sécante de l'angle C : cela paroît par les tables des sinus.

Quoique notre dessein ne soit pas d'entrer dans les calculs des sinus, des tangentes & des sécantes ; cependant nous ferons les réflexions & les remarques suivantes, tant pour en faire connoître l'usage, que pour faire concevoir d'une maniere générale comment on peut découvrir ces mesures des angles par le moyen du calcul.

20. On suppose le sinus total ou le rayon de quelque cercle que ce soit, grand ou petit, divisé en 100000, ou même en 10000000 parties égales, en sorte que l'on conçoit le rayon d'un petit cercle divisé en autant de parties que le rayon d'un grand cercle ; de même que l'on suppose la circonférence de tout cercle divisé en 360 degrez ; & on cherche ensuite combien les autres sinus qui sont tous moindres que le

ſinus total, contiennent de parties égales à celles du rayon.

21. Puiſque le rayon de tout cercle eſt diviſé en autant de parties égales, il faut que les parties d'un petit rayon ſoient moindres que les parties d'un grand: c'eſt pourquoi les tables des ſinus dans leſquelles on trouve combien chaque ſinus contient de parties à proportion du rayon, ne font pas connoître la grandeur abſolue de ces ſinus; mais ſeulement leur grandeur relative; c'eſt-à-dire, le rapport qu'ils ont entr'eux: par exemple, quoique l'on trouve que le ſinus d'un angle de 30 degrez, ſoit de 50000 parties, comme nous l'allons voir, en ſuppoſant le rayon diviſé en 100000 parties, on ne ſçait pas pour cela quelle eſt la grandeur réelle de ce ſinus; en ſorte qu'on puiſſe dire qu'il a trois pieds, quatre pieds, &c. Mais on ſçait quel eſt ſon rapport avec les autres ſinus; on connoît, par exemple, que le ſinus de trente degrez eſt la moitié du ſinus de l'angle droit; puiſque le premier eſt de 50000 parties, & l'autre de 100000. Il en eſt des ſinus comme des arcs: on ne connoit pas la grandeur abſolue des arcs, quoique l'on connoiſſe le nombre des degrez qu'ils contiennent; ainſi, quoique l'on ſçache qu'un arc eſt de 20 degrez, on ne ſçait pas pour cela combien il a de pouces ou de pieds, à moins que l'on ne connoiſſe d'ailleurs la grandeur abſolue de la circonférence.

22. Mais quoiqu'on ne connoiſſe pas la grandeur abſolue des ſinus, cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe trouver la grandeur abſolue des côtez d'un triangle dont on connoît un côté & les angles: car ſi dans un triangle on connoît deux angles & un côté, on trouvera les ſinus des angles par les tables. Or les ſinus ſont proportionnels aux côtez oppoſez aux angles, comme nous le ferons voir; par conſéquent ſi le ſinus de l'angle oppoſé au côté connu eſt le double de l'au-

tre sinus, le côté connu sera aussi le double du côté cherché : ainsi si le côté connu est de 50 toises, le côté qu'on cherche sera de 25 toises. Il faut dire la même chose des tangentes & des sécantes. Ces réflexions suffisent afin de faire connoître l'usage des sinus : nous allons à présent en faire quelques autres, & donner quelques remarques, pour faire concevoir comment on peut découvrir ces sinus.

23. Il est évident que les cordes font connoître les sinus, puisque la moitié d'une corde est toûjours le sinus de la moitié de l'arc soutenu par la corde (9); c'est pourquoi afin de trouver les sinus, on cherche les cordes des différens arcs.

24. On voit d'abord que le sinus d'un angle ou d'un arc de 30 degrez contient 50000 parties : car la corde de l'arc de 60 degrez, qui est un côté de l'exagone régulier inscrit, est égal au rayon, comme on l'a démontré (Liv. II. Art. 100); par conséquent cette corde contient 100000 parties (nous supposons ici le rayon divisé seulement en 100000 parties égales.) Or le sinus de 30 degrez est la moitié de cette corde; ainsi il contient 50000 parties.

26. Remarquez que le Théorême fondamental touchant le quarré de l'hypotenuse est d'un grand usage dans la construction des tables des sinus & dans la Trigonométrie, puisque par ce Théorême on peut toûjours connoître le troisiéme côté d'un triangle rectangle, lorsqu'on connoît les deux autres côtez; car si on connoît les deux côtez qui comprennent l'angle droit, pour lors, afin de connoître l'hypotenuse, il faut prendre les deux quarrez de ces côtez & les ajoûter ensemble, pour en faire une somme, de laquelle tirant la racine quarrée, on aura l'hypotenuse cherchée : mais si on connoissoit l'hypotenuse & un des côtez qui forment l'angle droit, il faudroit ôter le quarré de ce côté, du quarré de l'hypotenuse, & tirer ensuite la

racine quarrée du reste ; cette racine seroit l'autre côté de l'angle droit. Supposons donc que dans le triangle Fig. 4. CAB, le côté CA soit de 3 pieds, & l'autre côté AB de 4 ; les quarrez de ces nombres sont 9 & 16, qui ajoûtez ensemble font 25 : la racine quarrée de cette somme, qui est 5, fait connoître que l'hypotenuse CB est de 5 pieds. Si l'hypotenuse CB étoit connuë avec un des côtez de l'angle droit, tel que CA, en sorte que CB eût 5 pieds & CA en eût 3, il faudroit ôter 9 quarré de 3, de 25 quarré de 5 ; & le reste 16 seroit le quarré de l'autre côté AB ; ainsi le côté AB seroit de quatre pieds, parce que 4 est la racine quarrée de 16.

27. Il arrive presque toûjours qu'on ne peut faire éxactement l'extraction de la racine quarrée ; parce qu'il reste ordinairement quelque chose après l'opération ; de-là vient que la plûpart des sinus, tels qu'on les trouve dans les tables, ne sont pas absolument éxacts : mais pour rendre l'erreur insensible, on a supposé le rayon divisé en un grand nombre de parties : ce nombre est ordinairement 10000000. Or il est facile de faire voir par un éxemple, que quand on ne peut tirer éxactement la racine, l'erreur est moindre à proportion, lorsqu'on opere sur un grand nombre, que lorsqu'on opere sur un petit. Supposons qu'on veüille tirer la racine quarrée de 10150 & celle de 22, on trouvera que celle de 10150 est 100, & que celle de 22 est 4 : mais ni l'une ni l'autre de ces racines n'est éxacte, il s'én faut à peu-près une unité. Or il est évident que 1 est moindre par rapport à 100 que par rapport à 4, puisque 1 n'est que la centiéme partie de 100, & qu'il est le quart de 4.

Fig. 1. 28. La remarque de l'article 26 sert à trouver par le calcul le sinus d'ũn arc, lorsque l'on connoît le sinus du complement de cet arc : par éxemple, connoissant GH sinus de l'arc GA, que je suppose être de

30 degrez, voici comme je fais pour trouver GL, qui eſt le ſinus de l'arc GD, complement du premier arc GA : dans le triangle rectangle CLG je connois deux côtez; ſçavoir, l'hypotenuſe CG, qui eſt un rayon que je ſuppoſe de 100000 parties, & le côté CL égal au ſinus GH, qui eſt de 50000 parties; par conſéquent ſi du quarré de l'hypotenuſe 100000, j'ôte le quarré de 50000, le reſte ſera le quarré du ſinus GL; donc en tirant la racine quarrée de ce reſte, on aura le ſinus GL.

29. La même remarque peut encore ſervir à faire voir comment on trouve par le calcul les tangentes & les ſécantes des arcs dont on connoît les ſinus. Soit l'arc AD dont il faut trouver la tangente AB & la ſécante CB, en ſuppoſant que l'on connoît le ſinus DE. Fig. 4. Je conſidere que dans le triangle rectangle CED, on connoît deux côtez; ſçavoir, le rayon CD qui eſt l'hypotenuſe, & le ſinus ED; par conſéquent on trouvera facilement le troiſiéme côté CE. Après quoi conſidérant que ce triangle rectangle CED eſt ſemblable au triangle rectangle CAB, à cauſe de l'angle C qui eſt commun, je ferai la proportion ſuivante, CE. CA :: DE. AB, dont les trois premiers termes étant connus, je connoîtrai le quatriéme par la regle de trois. On connoîtra la ſécante CB en faiſant cette autre proportion CE. CA : : CD. CB, dont les trois premiers termes ſont auſſi connus, puiſque CD eſt égal à CA.

On a des tables des ſinus, des tangentes & des ſécantes qui ont été faites & imprimées avec beaucoup d'éxactitude, telles ſont celles de M. Ozanam de l'année 1685. Il ne nous reſte plus que de montrer aux Commençans par quelques exemples la maniere dont on ſe ſert de ces tables.

30. Pour cela il faut obſerver que la quantité de degrez eſt marquée au haut de chaque page, & que les minutes ſont dans la premiere colomne à la gauche

cela posé, si on cherche le sinus d'un angle de 36 degrez 18 minutes, il faut aller à la page au haut de laquelle on trouvera 36ᵈ, & chercher dans la seconde colomne, qui est celle des sinus, quel est le nombre qui répond à la 18ᵐᵉ min. on trouve que c'est 59201. 32: ce nombre est le sinus d'un angle ou d'un arc de 36ᵈ 18ᵐ: la tangente du même angle est le nombre 73457. 30, qui répond aussi à la 18ᵐᵉ minute dans la troisiéme colomne. Enfin la sécante de cet angle est le nombre 124080. 52, qui répond encore à la 18ᵐᵉ minute dans la quatriéme colomne.

31. L'exemple qu'on vient de donner fait voir comment par le moyen des tables on peut trouver le sinus d'un angle connu: mais il est encore nécessaire de sçavoir comment on trouve un angle dont on connoît le sinus; supposez, par exemple, qu'on ait le sinus 64412. 36, & qu'on veuille sçavoir de quel angle il est sinus; il faut chercher ce nombre dans les colomnes des sinus, comme on cherche les mots dans un Dictionnaire; on trouvera qu'il répond à la sixiéme minute dans la page au haut de laquelle est marqué le quarantiéme degré; par conséquent ce nombre est le sinus d'un angle de 40ᵈ 6 minutes; c'est la même chose pour les tangentes & les sécantes.

32. Remarquez que les sinus vont toûjours en augmentant dans la page qui est à gauche, au lieu qu'ils vont en diminuant dans la page qui est à droite. Cela vient de ce que l'on a mis dans cette derniere page les angles qui sont les complémens de ceux de la premiere; par exemple, l'angle de 75ᵈ 20 min. se trouve dans une page à la droite, vis-à-vis de l'angle de 14ᵈ 40 min. qui est à la page à gauche. Or les angles augmentant toûjours dans la page à gauche, il est nécessaire que les angles qui sont marquez à la page à droite, & qui sont les complémens des premiers, aillent toûjours en diminuant; & par conséquent leurs sinus vont aussi en

diminuant. Il faut dire la même chose des tangentes & des sécantes.

33. Remarquez encore que le point qui est avant les deux derniers chiffres des sinus, des tangentes & des sécantes, marque que l'on peut retrancher ces deux derniers caracteres sans erreur sensible; en sorte que les chiffres qui restent après le retranchement des deux derniers, expriment les sinus, les tangentes & les sécantes, en supposant le rayon de 100000 parties, au lieu que dans les tables on l'a supposé de 10000000, lequel nombre contient deux chiffres de plus que 100000. Mais il faut prendre garde que si on retranche les deux chiffres d'un sinus, on doit aussi retrancher les deux chiffres des autres sinus, tangentes & sécantes que l'on emploie dans la même proportion ou dans la même opération.

Après tout ce que nous avons dit sur les sinus, les tangentes & les sécantes, il ne sera pas difficile d'entendre ce que nous avons à dire sur la Trigonométrie rectiligne qui est entierement fondée sur trois Théorêmes que nous allons démontrer, & ensuite nous exposerons les Problêmes généraux, dont les Problêmes particuliers pour mesurer des longueurs telles que sont la distance & la hauteur des objets, ne sont que des applications.

Pour abréger le discours, nous marquerons dans la suite les sinus des angles dont nous parlerons, en mettant une S devant les lettres qui désigneront les angles : par exemple, au lieu d'écrire le sinus de l'angle BAC, nous écrirons SBAC; si l'angle n'est désigné que par une seule lettre comme A, on écrira SA pour signifier le sinus de l'angle A.

THEOREME I.

34. *Dans tout triangle, les sinus des angles sont entr'eux comme les côtez opposez à ces angles.*

Fig. 5. Soit le triangle BAC que je suppose inscrit dans un cercle, (ce qui est toûjours possible, (je dis que le côté AB est au côté AC, comme le sinus de l'angle C opposé au côté AB est au sinus de l'angle B opposé au côté AC, ou *alternando*, AB. SC : : AC. SB.

DEMONSTRATION.

L'angle C étant inscrit, a pour mesure la moitié de l'arc AB sur lequel il est appuyé. Or le sinus de la moitié de l'arc AB est la moitié de la corde AB (9.) donc cette moitié de corde est aussi le sinus de l'angle C opposé au côté AB. Pareillement l'angle B a pour mesure la moitié de l'arc AC. Or le sinus de la moitié de l'arc AC est la moitié de la corde AC : donc la moitié de cette corde est aussi le sinus de l'angle B; par conséquent les sinus des angles sont les moitiés des côtez opposez. Or les moitiez sont comme les tous : donc AB. AC : : SC. SB, ou, ce qui est la même chose, SC. SB : : AB. AC. On démontreroit de la même maniere, que AB. BC : : SC. SA, & que AC. BC : : SB. SA, ou *alternando*, AB. SC : : BC. SA, & AC. SB : : BC. SA.

Quoique les sinus des angles soient entr'eux comme les côtez opposez, il ne s'ensuit pas que les angles même soient entr'eux comme les côtez opposez, parce que les sinus ne sont pas proportionnels aux angles, comme on en a averti, Article 11.

LEMME I.

35 *Lorsque deux quantitez sont inégales, la plus grande est égale a la moitié de la somme, plus à la moitié de la différence; & la plus petite est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.*

Si on a, par exemple, deux nombres dont la somme soit 40, & la différence soit 8, le plus grand de ces deux nombres est égal à la moitié de 40, plus à la moi-

tié de 8, ces deux moitiez sont 20 + 4 = 24 ; & le plus petit des deux nombres est égal à la moitié de la somme moins la moitié de différence, c'est-à-dire, à 20 — 4 = 16.

Pour démontrer cette proposition, nous supposerons deux lignes inégales jointes ensemble, comme AB & BD, qui peuvent représenter toutes sortes de grandeurs inégales. Ayant partagé AD en deux parties égales au point C, & pris AE = BD. 1°. Il est évident que AD est la somme des lignes AB & BD. 2°. AC ou CD est la moitié de cette somme. 3°. EB est la différence ou l'excès de AB sur AE. Or par l'hypothese AE = BD : donc EB est aussi la différence de AB & de BD. 4°. CE ou CB est la moitié de la différence EB ; car les deux lignes AC & CD étant égales, si on retranche les parties égales AE & BD, les restes CE & CB doivent être égaux, & par conséquent ils sont chacun la moitié de la différence EB. Cela posé, il est facile de faire voir 1°. que la plus grande des deux lignes proposées, sçavoir AB, est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence, 2°. que la plus petite, qui est BD, est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. Fig. 6.

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. AB = AC + CB. Or AC est la moitié de la somme des lignes AB & BD, & CB est la moitié de leur différence EB : donc AB est égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence.

II. PARTIE. BD = CD — CB. Or CD est la moitié de la somme, & CB est la moitié de la différence. Par conséquent BD est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

36. CB est l'excès de CD sur BD; c'est-à-dire, que CB est l'excès de la moitié de la somme des deux lignes AB & BD sur la plus petite. Or on vient de voir que cet excès CB est la moitié de la difference de ces deux lignes; on peut donc dire en général que l'excès de la moitié de la somme de deux grandeurs sur la plus petite, est la moitié de leur différence.

LEMME II.

Fig. 7. 37. *Dans tout triangle, comme* BAC, *si on prolonge vers* D *le côté* AB, (je le suppose plus grand que l'autre côté de l'angle A;) *en sorte que* AD *soit égal à l'autre côté* AC, *& qu'on joigne les deux points* D *&* C *par la ligne* DC, *afin d'avoir le triangle isocele* DAC; *si ensuite on tire du sommet* A *de ce triangle, la perpendiculaire* AF *sur la base* DC; *je dis* 1°. *que* FD *est la tangente de la moitié de la somme des angles* B *&* C *opposez aux côtez* AC *&* AB. Par exemple, si les deux angles B & C pris ensemble valent 116 degrez, la ligne FD sera la tangente d'un angle de 58 dégrez (58 est la moitié de la somme 116.)

Car l'angle CAD est extérieur par rapport aux angles B & C du triangle BAC; par conséquent il est égal à ces deux angles pris ensemble (Liv. 2. art. 17.) mais cet angle CAD est partagé en deux parties égales par la perpendiculaire AF (Liv. II. art. 24.): donc l'angle DAF est la moitié de la somme des angles B & C. Or la ligne FD perpendiculaire sur AF est la tangente de cet angle, comme il paroîtra en décrivant l'arc FG du centre A, & de l'intervalle AF; donc la ligne FD est la tangente de la moitié de la somme des angles B & C.

Si on tire encore la ligne AE *parallele à* BC *base du triangle* BAC; *je dis* 2°. *que* EF *est la tangente de la*

moitié de la différence des mêmes angles B *&* C. Par exemple, si la différence des angles B & C est 34 degrez, la ligne FE sera la tangente d'un angle de 17 degrez.

Car l'angle DAF est égal à la moitié de la somme de ces deux angles, comme on vient de le prouver : d'ailleurs l'angle DAE est égal au plus petit des mêmes angles, sçavoir à l'angle B, à cause des lignes AE & BC, qui sont supposées paralleles ; donc l'angle EAF, qui est l'excès de l'angle DAF sur DAE, est la moitié de la différence des angles B & C (36.) Or la tangente de cet angle EAF, est la ligne droite FE perpendiculaire sur le rayon AF de l'arc FG ; donc FE est la tangente de la moitié de la différence des angles opposez, B & C.

THEOREME II.

38. *Dans tout triangle, comme* BAC, *qui n'est pas équilateral, si on prend deux côtez inégaux, la somme de ces deux côtez, tels que* AB *&* AC *est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles* C *&* B *opposez aux deux côtez, est à la tangente de la moitié de la différence de ces angles.* Fig. 7.

Supposant les lignes tirées comme dans le second Lemme, il faut encore mener du point F la ligne FH parallele à BC base du triangle proposé BAC. Cela posé :

1°. Il est évident que DB est égale à la somme des côtez AB & AC, puisque par la construction AD=AC. 2°. Le double de AH est égal à la différence des côtez AB & AC ou AD : car la ligne AF étant perpendiculaire sur DC base du triangle isocele DAC, elle coupe cette base en deux parties égales au point F (Liv. II. Art. 24 ;) par conséquent la ligne FH coupe aussi DC en deux parties égales, puisqu'elle est tirée du point F ; donc cette ligne FH

étant parallele à la base BC de l'angle BDC, il faut aussi qu'elle divise également l'autre coté DB de cet angle (Liv. I. Art. 151. & 162.); par conséquent DH est la moitié de DB, c'est-à-dire, de la somme des côtez AB & AC ou AD. Or AH est l'excès de DH sur le petit côté AC ou AD; donc par le Corollaire (36.) du premier Lemme, AH est la moitié de la différence des côtez AB & AC; donc le double de AH est la différence entiere de ces côtez.

Ainsi DB est la somme des côtez AB & AC; le double de AH est la différence de ces côtez; d'ailleurs on a fait voir dans le second Lemme, que FD est la tangente de la moitié de la somme des angles C & B opposez aux deux côtez, & que FE est la tangente de la moitié de la différence de ces angles. Il faut donc prouver que DB est au double de AH. Comme FD est à FE.

DEMONSTRATION.

L'angle HDF ayant deux bases paralleles, sçavoir AE & FH par la supposition, on a la proportion (Liv. I. Art. 152.) DH. AH :: FD. FE; par conséquent si on double les deux premiers termes de la premiere raison, la proportion subsistera toûjours; on aura donc la proportion, le double de DH, qui est DB, est au double de AH :: FD. FE : C'est-à-dire, que la somme des côtez AB & AC est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles B & C est à la tangente de la moitié de leur différence. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME III.

Fig. 8. 39. *Dans un triangle scalene, comme* BAC, *c'est à-dire, dont les trois côtez sont inégaux, le grand côté* BC *est la somme des deux autres* AB & AC, *comme la différence de ces deux est à la différence des parties du grand côté divisé par la perpendiculaire* AD *tirée de l'angle opposé* A.

Du point A, comme centre, & de l'intervalle du moindre côté AC, décrivez une circonférence, & prolongez le côté AB au-delà du point A, jusqu'à la rencontre de la circonférence. 1°. Le petit côté AC étant égal à la ligne AF, parce que ce sont des rayons du même cercle, il s'ensuit que la ligne BF est égale à la somme des côtez AB & AC. En second lieu BG est la différence des côtez AB & AC, parce que le petit côté AC est égal à AG. Enfin la perpendiculaire AD coupant la corde EC en deux parties égales au point D (Liv. I. Art. 105.), il est évident que BE est la différence des parties BD & DC du grand côté BC. Il faut donc prouver que le grand côté BC est à BF somme des deux autres, comme leur différence BG est à BE différence des deux parties du grand côté : ce qui se réduit à cette proportion, BC. BF : : BG. BE.

DEMONSTRATION.

Considerez que les deux lignes BC & BF sont deux sécantes exterieures, qui sont tirées du même point B; par conséquent la sécante BC & sa partie BE hors du cercle, sont réciproques à l'autre sécante BF & à la partie BG hors du cercle (Liv. I. Art. 166.) On a donc la proportion, BC. BF : : BG. BE. Ce qu'il falloit démontrer.

40. De ces trois Théorêmes, nous allons déduire quatre Problêmes généraux desquels dépend la pratique de la Trigonométrie & de l'arpentage. Ces quatre Problêmes répondent à quatre Théorêmes sur la comparaison de deux triangles que nous avons démontrez égaux (Liv. II Art. 27. 29. 30. & 33.), lorsque de ces cinq choses, sçavoir, trois côtez & deux angles, il y en a trois dans un triangle égales aux trois correspondantes d'un autre triangle. Or puisque trois de ces cinq choses ne peuvent être égales dans deux triangles, à moins qu'ils ne soient égaux

en tout, il s'ensuit que ces trois choses, c'est-à-dire, ou deux angles & un côté, ou deux côtez & un angle, ou enfin les trois côtez déterminent un triangle; c'est pourquoi connoissant deux angles & un côté, ou deux côtez & un angle, ou les trois côtez d'un triangle, on peut connoître tout le reste. Nous en allons donner la méthode dans les quatre Problêmes suivans.

41. Il faut néanmoins observer que si on ne connoît que deux côtez & un angle aigu opposé à un de ces côtez, on ne peut trouver le reste du triangle, parce que deux triangles peuvent être inégaux, quoique ces trois choses soient égales dans les deux triangles; c'est pourquoi pour rendre les triangles égaux dans ce cas, il faut y ajoûter une quatriéme condition marquée dans le sixiéme Théorême sur les triangles (Liv. II. Art. 30.).

PROBLEME I.

42. *Connoissant deux angles & un côté d'un triangle, trouver les deux autres côtez.*

Fig. 9. Soit le triangle BAC dont on connoisse les deux angles B & C, & le côté BC. Pour trouver les deux autres côtez AB & AC, considerez d'abord, que puisqu'on connoît deux angles de ce triangle, on connoîtra facilement le troisiéme, qui avec les deux autres vaut 180 degrez : ensuite cherchez le sinus de chacun de ces angles dans la table des sinus, & faites la proportion suivante fondée sur le premier Théorême : le sinus de l'angle A est au côté BC, comme le sinus de l'angle C est au côté AB; laquelle proportion se marque en cette maniére SA. BC :: SC. AB. Or les trois premiers termes de cette proportion sont connus; par conséquent on pourra trouver le quatriéme, qui est le côté AB.

Pour avoir le côté AC, il faut faire la proportion

suivante, SA. BC : : SB. AC, dont les trois premiers termes sont aussi connus.

A la place de ces deux proportions, on peut prendre leurs alternes, qui sont SA. SC : : BC. AB, & SA. SB : : BC. AC.

Si on suppose l'angle B de 45 degrez 24 minutes, & l'angle C de 71 degrez 42 minutes; l'angle A sera nécessairement de 62 degrez 54 minutes. Si on suppose aussi le côté BC de 30 toises, la proportion, SA. BC : : SC. AB, marquée dans le Problême, se réduira à celle-ci, 89021 . 30 : : 94942. x, dont le premier terme 89021 est le sinus de l'angle A; le second 30 est le côté BC supposé de 30 toises, le troisiéme terme 94942 est le sinus de l'angle C; enfin le quatriéme terme x représente le côté AB qu'il faut chercher par la regle de trois. Or en faisant cette regle, on trouve pour quotient 31 plus $\frac{88609}{89021}$: cette fraction vaut presque un entier, c'est-à-dire, une toise, à cause que le numérateur est presque égal au dénominateur : ainsi le côté AB contient environ 32 toises.

Dans cette proportion, 89021 . 30 : : 94942 . x, nous avons pris les deux nombres 89021 & 94942 pour les sinus des angles A & C, quoique dans les tables on trouve ces sinus marquez par 89021. 28. & 94942. 55; en sorte que nous avons rétranché les deux derniers caracteres de chacun de ces sinus: c'est ce que l'on peut toûjours faire sans une erreur sensible, comme nous l'avons dit (33).

43. On peut observer pour plus grande exactitude que quand les deux chiffres retranchez valent plus de 50, il faut ajoûter une unité au reste : par exemple, dans la proportion précédente, en supposant l'angle C exactement de 71 deg. 42. min. il auroit été mieux de mettre 94943 à la place de 94942, parce que les deux

chiffres retranchez, qui sont 55, sont plus grands que 50 : mais en supposant que l'Angle A a précisément 62 degrez 54 minutes, on ne pourroit prendre 89022 au lieu de 89021, parce que les deux chiffres retranchez; sçavoir 28, sont moindres que 50.

44. Remarquez que si un angle étoit obtus, par exemple, de 120 degrez, on ne trouveroit pas cet angle dans la table, c'est pourquoi pour avoir le sinus de cet angle, il faudroit chercher son supplement, qui est l'angle de 60 degrez, lequel a le même sinus que l'angle dont il est supplément, comme on l'a fait voir (7.)

45. Remarquez encore que si on veut que le terme cherché soit le second extrême, ou le quatriéme terme de la proportion, il faut lorsqu'on cherche un côté, commencer la proportion par le sinus de l'angle opposé à un côté connu; & si on cherche un sinus, il faut commencer la proportion par le côté opposé à un angle connu; c'est pourquoi, comme il s'agissoit dans le Problême précédent de connoître un côté, nous avons commencé la proportion par le sinus de l'angle A, dont la base ou le côté opposé BC étoit supposé connu.

PROBLEME II.

46. *Connoissant deux côtez d'un triangle & l'angle compris entre ces côtez, trouver les deux autres angles & le troisiéme côté.*

Fig. 9. Soit le triangle BAC dont on connoisse le côté AB, le côté AC & l'angle A compris entre ces côtez. Afin de trouver les deux angles B & C, il faut faire la proportion suivante qui a été démontrée dans le second Théorême (38) : la somme des côtez connus AB+AC est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles C & B, est à la tangente de la moitié de la différence de ces angles. Dans cette proportion

portion les trois premiers termes ſont connus ; par conſéquent on trouvera le quatriéme, qui eſt la tangente de la moitié de la différence des angles B & C : cette tangente fera connoître par le moyen des tables, l'angle qui eſt la moitié de la différence des angles inconnus. Or en ajoûtant cet angle à la moitié de la ſomme des angles inconnus, on aura par le premier Lemme (35), l'angle C qui eſt le plus grand ; & en ôtant ce même angle de la moitié de la ſomme, on aura l'angle B, qui eſt le plus petit des angles inconnus : après cela il faudra chercher le côté BC par la méthode du premier problême.

Si on ſuppoſe le côté AB de 32 toiſes, le côté AC de 24, & l'angle A de 62 deg. 54 min. il eſt clair que la ſomme des deux angles inconnus eſt de 117 deg. 6 min. dont la moitié eſt 58 deg. 33 min. En cherchant dans les tables la tangente de ce dernier angle, on trouve qu'elle eſt de 163505. 28. Je fais donc la proportion énoncée dans le Problême : 32+24. 32—24 : : 163505 . x, ou bien, 56. 8 : : 163505 . x : le 4me terme de cette proportion eſt 23357 $\frac{48}{56}$.

La tangente que l'on trouve dans les tables la plus approchante de ce quatriéme terme eſt 23362, dont l'angle eſt de 13 deg. 9. min. Si donc on ajoûte cet angle, qui eſt la moitié de la différence des angles inconnus à la moitié de la ſomme, qui eſt de 58 deg. 33 min. on aura l'angle C, qui ſera de 71 deg. 42 min. & ſi on ôte 13 deg. 9 min. de 58 deg. 33 min. on aura le petit angle B de 45 deg. 24 min. Enſuite pour trouver le côté BC, on pourra faire cette proportion, SB . AC : : SA . BC, ou bien cette autre, SC . AB : : SA . BC.

47. Remarquez que ſi les deux côtez qui comprennent l'angle connu étoient égaux, les angles oppoſez à ces côtez ſeroient auſſi égaux ; ainſi puiſqu'on connoît la ſomme de ces deux angles, on connoîtroit auſſi chaque angle en particulier indépendamment de

la proportion marquée dans le Problême : par exemple, si les côtez étant égaux, l'angle qu'ils comprennent étoit de 50 degrez, la somme des autres qui seroient égaux entr'eux, seroit de 130 degrez ; & par conséquent chacun de ces deux angles vaudroit 65 degrez.

PROBLEME III.

48. *Connoissant deux côtez d'un triangle & l'angle opposé à un de ces côtez, & de plus sçachant de quelle espece est l'angle opposé à l'autre côté, trouver les deux angles inconnus & le troisiéme côté.*

Fig. 9. Soit le triangle ABC dont on connoisse les deux côtez AB & AC, & l'angle B opposé au côté connu AC, & que l'on sçache aussi de quelle espece est l'angle C opposé à l'autre côté connu AB ; c'est-à-dire, que l'on connoisse s'il est aigu ou obtus, sans qu'il soit nécessaire de sçavoir combien de degrez il contient, (s'il étoit droit, pour lors les trois angles seroient connus.) Pour trouver combien cet angle C contient précisément de degrez, il faut faire la proportion suivante fondée sur le premier Théorême : AC. SB : : AB. SC, les trois premiers termes de cette proportion sont connus par l'hypothese ; ainsi on pourra trouver le quatriéme qui est le sinus de l'angle C. Ce sinus peut convenir également à un angle aigu, & à un angle obtus qui est son supplément (7) ; mais comme l'espece de l'angle C est déterminée par l'hypothese, on sçaura si l'angle C est l'angle aigu qui répond au sinus trouvé ; ou si c'est l'angle obtus qui est son supplément. On connoîtra donc deux angles dans le triangle ; sçavoir, l'angle B & l'angle C ; par conséquent on sçaura la valeur du troisiéme ; enfin on trouvera le troisiéme côté BC par le premier Problême.

Si on suppose le côté AB de 32 toises, le côté AC de 24, & l'angle B de 45 deg. 24 min. : & que l'angle

C soit aigu, la proportion, AC . SB : : AB . SC, se réduira à celle-ci : 24 . 71203 : : 32 . x. Le 4me. terme de cette proportion est $94937 + \frac{8}{24}$ ou $\frac{1}{3}$: ce nombre 94937 est moindre que 94942 sinus de 71 deg. 42 min. mais comme il n'en differe pas beaucoup, il s'ensuit que l'angle C, qui a pour sinus $94937 \frac{8}{24}$, est environ de 71 deg. 42 min. comme on l'a supposé dans le premier Problême. D'ailleurs par la supposition l'angle B est de 45 deg. 24 min. par conséquent l'angle A vaut à peu-près 62 deg. 54 min.

A présent, afin de trouver le côté BC, il faut faire la proportion SB . AC : : SA . BC, qui se réduit à celle-ci, 71203 . 24 : : 89021 . x, dont on trouvera que le 4me terme est $30 + \frac{414}{71203}$: ainsi le côté BC sera de 30 toises, plus la fraction $\frac{414}{71203}$ qui peut être négligée, parce que le numérateur ne contient qu'une très-petite partie du dénominateur.

Mais si les deux côtez AB & AC & l'angle B étant toûjours les mêmes, on avoit supposé l'angle C obtus, comme l'angle AEB, pour lors, afin de trouver la valeur de cet angle, il auroit fallu faire la même proportion qu'on a faite, 24 . 71203 : : 32 . x, & au lieu de prendre l'angle aigu du sinus 94942 que l'on peut regarder comme le quatriéme terme, il auroit fallu prendre l'angle obtus 108 deg. 18 min. qui est le supplément de l'angle aigu 71 deg. 42 min. ainsi l'angle C auroit eu 108 deg. 18 min. par conséquent l'angle A auroit été seulement de 26 deg. 18 min.

Si on cherchoit le côté BC qui répondroit à l'angle A dans cette hypothese, on trouveroit qu'il auroit à peu-près 15 toises ; au lieu que dans la supposition que l'angle C est aigu, le côté BC a été trouvé d'environ 30 toises.

49. Nous avons supposé que deux triangles peuvent être différens, quoique deux côtez de l'un soient égaux

à deux côtez de l'autre, chacun à chacun, & que l'angle opposé à un des côtez du premier soit égal à l'angle correspondant du second triangle. On peut voir cela sensiblement, si du point A comme centre, & de l'intervalle AC qui est le plus petit des côtez connus, on décrit un arc de cercle qui coupe le côté BC au point E, & qu'ensuite on tire une ligne du point A au point E: car on aura le triangle BAE, dont les côtez AB & AE sont égaux aux côtez AB & AC du triangle BAC, & de plus l'angle B est commun aux deux triangles.

50. Il est évident que dans le triangle BAE, l'angle AEB est obtus & supplément de l'angle C: car dans le triangle isocele EAC, les deux angles E & C sur la base EC sont égaux. Or l'angle AEB est supplément de l'angle E ou AEC; par conséquent il est aussi supplément de l'angle C.

51. Remarquez que si l'angle connu B est droit ou obtus, pour lors les deux triangles sont égaux en tout, parce que l'autre angle sur la base BC est nécessairement aigu, (Liv. 2. Art. 21.) & par conséquent de même espece dans les deux triangles; ainsi dans ce cas il est inutile de mettre la quatriéme condition marquée dans le troisiéme problême, parce qu'elle s'ensuït nécessairement.

PROBLEME IV.

52. *Connoissant les trois côtez d'un triangle, trouver chacun des trois angles & la perpendiculaire sur le grand côté, tirée de l'angle qui lui est opposé.*

Fig. 8. Soit le triangle BAC dont on connoisse les trois côtez. Afin de trouver la valeur de l'angle C formé par le grand & le petit côté, il faut faire la proportion suivante fondée sur le troisiéme Théorême (39): le plus grand côté BC est à la somme des deux autres AB & AC, comme leur différence BG est à BE différence des parties de la base ou du grand côté divisé

par la perpendiculaire AD. Dans cette proportion les trois premiers termes sont connus; par conséquent on trouvera le 4me: il faudra le retrancher du grand côté BC, & on connoîtra le reste EC, duquel prenant la moitié on aura DC côté du triangle rectangle ADC, dans lequel il y aura trois choses connuës: sçavoir, le côté AC, le côté DC, & l'angle droit en D; ainsi on pourra trouver l'angle C. Cet angle qui est commun aux deux triangles ADC & BAC étant connu, on trouvera facilement la perpendiculaire AD & les deux autres angles du grand triangle.

Si on suppose le grand côté BC de 30 toises, le côté AB de 23, & le petit côté AC de 17, on aura la proportion suivante marquée dans la solution du Problême, $30 . 23 + 17 :: 23 - 17 . x$, ou bien, $30 . 40 :: 6 . x = 8$. Ensuite il faut ôter 8 du grand côté 30, le reste est 22, dont on prendra la moitié, qui est 11; & dans le triangle rectangle ADC, on connoîtra l'hypotenuse AC, qui contient 17 toises par la supposition, le côté DC qui en contient 11, & l'angle droit en D.

Pour connoître l'angle C, on fera cette proportion: le côté AC est au sinus de l'angle D ou au sinus total, comme le côté DC est au sinus de l'angle CAD: voici cette proportion exprimée en nombres, $17 . 100000 :: 11 . x = 64705 \frac{15}{17}$: ce quatriéme terme est le sinus de l'angle CAD. En cherchant dans les tables, on trouve que le sinus qui approche le plus de ce nombre est 64701 auquel répond l'angle de 40 deg. 19 min. qui est la valeur de l'angle CAD: mais d'ailleurs l'angle D est droit, par conséquent l'angle C que l'on cherche vaut 49 deg. 41 min.

Pour connoître la perpendiculaire AD, on fera cette proportion (41): le sinus de l'angle droit en D est au côté AC, comme le sinus de l'angle C est à la perpendiculaire AD. De même pour trouver l'angle

B du grand triangle, on dira (48) : le côté AB est au sinus de l'angle C, comme le côté AC est au sinus de l'angle B. Ce dernier sinus étant connu, fera trouver l'angle B par le moyen des tables : enfin on connoîtra le troisiéme angle BAC du triangle, parce que les deux autres angles B & C seront connus.

53. Après avoir trouvé la partie DC de la base, on pourroit connoître la perpendiculaire AD d'une autre maniere : car le triangle ADC étant rectangle, & les deux côtez AC & DC étant connus, si on ôte le quarré de DC du quarré de AC, le reste sera le quarré de la perpendiculaire (26).

54. Remarquez qu'il n'est pas nécessaire dans la pratique qu'il y ait actuellement une perpendiculaire tirée sur le grand côté, ni une circonférence décrite, comme dans la Fig. 8, afin de trouver la valeur de chacun des angles & de la perpendiculaire, lorsqu'on connoît les côtez du triangle, il suffit de faire cette proportion marquée dans le Problême : le grand côté est à la somme des deux autres, comme leur différence est à un quatriéme terme, & d'opérer ensuite, comme il est prescrit dans le Problême. La perpendiculaire & la circonférence n'ont été décrites que pour la démonstration. Il est bon de se donner à soi-même quelque exemple, en supposant les trois côtez d'un triangle d'un certain nombre de parties.

55. Remarquez encore que s'il y avoit deux côtez égaux dans un triangle dont on suppose les trois côtez connus, alors la perpendiculaire tirée du sommet de l'angle compris entre les côtez égaux, diviseroit la base en deux parties égales ; c'est pourquoi on n'auroit pas besoin de la premiere proportion qu'on a faite pour connoître les parties de la base, puisque chacune en seroit la moitié : par exemple, si dans le triangle BAC, les deux côtez AB & AC étoient égaux, les deux parties BD & DC de la base divisée par la perpendiculaire,

seroient connues sans proportion, parce que chacune seroit la moitié de la base BC que l'on suppose connue (Liv. II. Art. 24.)

56. Il est évident que dans les différens cas des quatre Problêmes précédens, on peut trouver la surface du triangle proposé : car la surface d'un triangle est égale au produit d'un côté pris pour base, multiplié par la moitié de la hauteur. Or dans les trois premiers Problêmes, on a donné la méthode de connoître tous les côtez d'un triangle, & dans le quatriéme, on a montré la maniere de trouver la perpendiculaire tirée de l'angle opposé au grand côté du triangle dont on connoit les trois côtez ; ainsi cette perpendiculaire étant la hauteur du triangle par rapport au grand côté consideré comme base ; il s'ensuit qu'on peut trouver la surface du triangle dans les différens cas des quatre Problêmes.

57. On a supposé dans les Problêmes précedens que l'on connoît quelqu'un des côtez du triangle : mais si on ne connoissoit que les angles, on ne pourroit trouver les côtez, parce que la grandeur des angles ne détermine pas la longueur des côtez, puisque deux triangles peuvent être semblables, & avoir par conséquent les angles égaux, quoique les côtez de l'un ne soient pas égaux aux côtez de l'autre. Cependant lorsqu'on connoît les angles d'un triangle, on peut toûjours connoître les rapports des côtez ; car nous avons démontré que les sinus des angles sont comme les côtez opposez (34).

AUTRE METHODE DE RESOUDRE les quatre Problêmes précédens.

58. Avant de faire l'application de ces quatre Problêmes généraux à des exemples particuliers, nous allons exposer en peu de mots une autre méthode de résoudre ces Problêmes, laquelle ne suppose pas les ta-

bles des ſinus, & qui eſt indépendante des trois Théorêmes qui ont été démontrez dans ce Traité de Trigonométrie. Cette méthode eſt fondée ſur les quatre Théorêmes que nous avons donnez dans le ſecond Livre (Liv. II. Art. 53, 55, 56, & 59) touchant les conditions qui rendent les triangles ſemblables. Elle ne ſuppoſe qu'une échelle, c'eſt-à-dire, une ligne droite, comme MN, Fig. 17, diviſée en un certain nombre de parties égales: par exemple, 100, 200, &c. On peut ſe ſervir de la ligne des parties égales du compas de proportion. Nous allons réſoudre le premier & le ſecond Problême par cette méthode.

59. *Connoiſſant deux angles & un côté d'un triangle, trouver les deux autres côtez.*

Fig. 9. Soit le triangle BAC, dont on connoiſſe les deux angles B & C avec le côté BC, que je ſuppoſe de 30 toiſes. Pour trouver les deux autres côtez AB & AC; conſiderez d'abord, que puiſqu'on connoît deux angles de ce triangle, on connoîtra facilement le troiſiéme, qui, avec les deux autres, vaut 180 degrez.

Cela poſé, prenez ſur l'échelle avec le compas la longueur de 30 parties égales, & tirez une ligne droite, comme *bc*, égale à cette longueur: enſuite tirez à l'extrémité *b* une ligne qui faſſe avec *bc* un angle égal à l'angle B, & à l'extrémité *c* une autre ligne qui faſſe avec *bc* un angle égal à l'angle C: ces deux lignes étant prolongées, ſe réüniront à un point comme *a*, & formeront le triangle *bac* ſemblable au triangle BAC, (Liv. I. Art. 53.) par conſéquent les côtez de l'un ſont proportionnels aux côtez homologues de l'autre; ainſi BC. AB :: *bc*. *ab*. D'où il ſuit que le côté AB contient autant de parties égales à celles de BC que le côté *ab* contient de parties égales à celles de *bc*; ſi donc en prenant la longueur de *ab* avec le compas, & portant cette longueur ſur l'échelle, pour voir combien elle contient de parties égales de l'échelle, on trouve qu'elle en con-

tient 32 ; on sera assuré que AB contient 32 toises. Il faut faire la même chose pour trouver combien le côté AC contient de toises.

60. On voit par la solution de ce Problême, qu'il ne s'agit que de faire un triangle semblable au triangle proposé dont on veut connoître quelque côté ou quelque angle. Or nous avons donné (Liv. II. Art. 35, 36, 37, & 38.) dans le second Livre quatre Problêmes qui enseignent à faire un triangle semblable au triangle proposé. Voici encore la solution du second Problême par la même méthode.

61. *Connoissant deux côtez d'un triangle & l'angle compris entre ces côtez, trouver les deux autres angles & le troisiéme côté.*

Soit le triangle BAC, dont on connoisse le côté AB, que je suppose de 32 toises, & le côté AC de 24 toises, avec l'angle compris entre ces côtez. Afin de trouver le côté BC il faut prendre sur l'échelle la longueur de 32 parties égales, & tirer la ligne *ab* égale à cette longueur, ensuite prendre aussi sur l'échelle 24 parties égales, & tirer du point *a* la ligne *ac* égale à cette autre longueur, & qui fasse avec *ab* un angle égal à l'angle A : après cela menez une ligne droite du point *b* au point *c*, & vous aurez le triangle *bac* semblable (Liv. I. Art. 55.) au triangle BAC, puisque les deux côtez *ab* & *ac* sont proportionnels aux côtez AB & AC du triangle BAC, & que l'angle *a* est égal à l'angle A ; par conséquent, si en portant sur l'échelle la longueur du côté *bc*, on voit combien ce côté contient de parties égales de l'échelle, on sçaura combien le côté correspondant BC contient de toises, qui sont des parties égales à celles des côtez AB & AC.

Pour trouver les angles B & C du triangle proposé, il faut mesurer avec le rapporteur les angles correspondans *b* & *c* du triangle semblable *bac*.

62. Si les côtez du triangle proposé ne contenoient

qu'un petit nombre de toises ; par exemple, 3, 4, 5, 6, 7, &c. il faudroit réduire chacun des côtez connus de ce triangle en pieds ou en pouces, afin d'avoir un plus grand nombre de parties ; parce que le nombre de ces parties étant plus grand, il est plus facile de faire le triangle *bac* semblable au premier.

63. Remarquez que cette derniere méthode est plus sujette à erreur dans la pratique que la premiere, tant à cause qu'il est difficile d'avoir une échelle qui soit divisée exactement en parties égales, que parce qu'il est presque impossible de faire un triangle tout-à-fait semblable à un autre.

Il ne sera pas inutile de proposer quelques Problêmes particuliers sur la hauteur & la distance des objets, qui ne sont que des applications des quatre Problêmes généraux dont nous venons de parler.

64. Lorsque l'on cherche quelque longueur inconnue, par exemple, la hauteur d'une tour par le moyen d'un triangle, on se sert d'un instrument pour mesurer les angles du triangle ; cet instrument est appellé *Graphometre* : c'est une circonférence ou une demi-circonférence divisée en degrez & en minutes. Il y a une regle attachée au centre du graphometre que l'on appelle *Alidade*, qui peut tourner autour du centre. Elle sert à diriger les rayons visuels par le moyen de deux pinnules, c'est-à-dire, deux plaques percées qui sont attachées sur l'alidade : cet instrument est ordinairement de cuivre. Dans la Figure 10. la circonférence EGFH représente un graphometre avec son alidade GH, dont les pinnules sont les petites plaques G & H, qui sont percées vers le milieu, afin d'appercevoir l'extrémité de la tour dont on veut mesurer la hauteur.

PROBLEME. V.

65. *Mesurer une hauteur accessible.*

Fig. 10. Soit la tour accessible AC, dont il faut trouver la

hauteur. Pour cela mesurez d'abord la distance du point B au point C, soit avec une chaîne ou une corde, soit avec une perche; ensuite dirigez l'alidade du graphometre, en sorte que l'on puisse voir l'extrémité A de la tour à travers des pinnules par le rayon visuel BA, & remarquez quel est le degré & la minute marquée au point H, où passe le rayon visuel: enfin disposez l'alidade horisontalement suivant la direction EF, afin d'appercevoir le bas de la tour au travers des pinnules, & voyez combien l'arc HF contient de degrez & de minutes; cet arc est la mesure de l'angle au centre HBF ou ABC; ainsi dans le triangle rectangle BAC, connoissant l'angle B par l'observation, & l'angle C qui est droit, à cause de la tour qui est perpendiculaire sur l'horison, il sera facile de connoître l'angle A: mais d'ailleurs le côté BC a été mesuré; c'est pourquoi, afin de trouver la hauteur cherchée AC, qui est un des côtez du triangle, il n'y a qu'à faire (premier Problême général) la proportion suivante, dont les trois premiers termes sont connus: le sinus de l'angle A est au côté BC, comme le sinus de l'angle B est au côté AC qui est la hauteur de la tour.

66. Si on veut mesurer la hauteur de la tour sans graphometre, & sans le secours des tables des sinus, on peut le faire en employant deux triangles semblables en cette maniere.

Plantez un piquet, comme EFG, qui soit perpendiculaire à l'horison, & par conséquent parallele à la tour, & éloignez-vous de ce piquet à quelque distance, par exemple, en BH, afin que vous puissiez voir l'extrémité A de la tour par un rayon visuel BEA qui rase l'extrémité du piquet, lequel doit être plus grand que la hauteur d'un homme; enfin regardez aussi un point de la tour tel que K, par un rayon horisontal BK, & remarquez le point F du piquet par lequel passe le rayon horisontal. Tout cela posé, on aura deux triangles semblables, BEF & BAL; par conséquent Fig. 11.

leurs côtez homologues seront proportionnels ; ce qui donnera la proportion BF. BL : : EF. AL, dont les trois premiers termes sont des lignes que l'on peut facilement mesurer ; par conséquent on pourra connoître le quatriéme, auquel ajoûtant LC=BH, on aura la hauteur AC.

67. On peut encore trouver la même chose par le moyen de l'ombre de la tour, sans graphometre & sans
Fig. 12. les tables des sinus. Plantez un piquet EF, comme dans l'exemple précédent, qui soit perpendiculaire à l'horison, & par conséquent parallele à la tour : ensuite mesurez 1°. l'ombre du piquet, 2°. la hauteur du piquet, sans y comprendre la partie enfoncée en terre, 3°. l'ombre de la tour : enfin faites la proportion : l'ombre du piquet est à la hauteur du piquet, comme l'ombre de la tour est à sa hauteur. Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, on trouvera facilement le quatriéme.

68. Remarquez que pour avoir l'ombre de la tour, qu'on suppose terminée en pointe dans les figures 10, 11 & 12, il ne suffit pas de prendre la distance qui est depuis la fin de l'ombre jusqu'à la tour ; il faut y ajouter la moitié du diametre de la tour : par exemple, si l'ombre de la tour finit au point B, il ne suffit pas de prendre BD pour avoir la longueur de l'ombre ; il faut encore ajoûter DC qui est la moitié du diametre de la tour. Il faut observer la même chose dans les deux premieres manieres de mesurer la hauteur de la tour, c'est-à-dire, qu'il faut prendre la distance du point B, Fig. 10, ou du point H, Fig. 11, jusqu'au centre C de la tour, auquel répond l'extrémité A.

PROBLÊME VI.

69. *Mesurer la largeur d'une riviere.*

Fig. 13. Soit la largeur d'une riviere marquée par BC. On suppose que celui qui veut mesurer cette largeur soit

du côté du point B, & que le point C qui est d'un autre côté soit un objet remarquable ; par exemple, une pierre ou le tronc d'un arbre, ou autre chose semblable. Pour trouver la longueur de la ligne BC, choisissez un certain point, comme A, duquel vous puissiez appercevoir le point B & le point C, & mesurez avec le graphometre l'angle A & l'angle B du triangle BAC: mesurez aussi la ligne AB, qui est la distance des deux points B & A : après cela vous trouverez par le premier Problême le côté BC, qui est la largeur qu'on cherche.

PROBLEME VII.

70. *Mesurer une hauteur inaccessible, comme celle de la tour* AC, *qu'on suppose inaccessible.*

Choisissez à quelque distance de la tour deux lieux différens, comme B & G, qu'on appelle *Stations*, desquels on puisse voir l'extrémité A de la tour. Les rayons visuels BA & GA & la ligne BG qui est l'intervalle des stations, formeront le triangle BAG, dont il faudra mesurer l'angle B, l'angle G & le côté BG, ces trois choses étant connues, on trouvera facilement le côté AB par le premier Problême. Connoissant le côté AB, il faudra mesurer l'angle ABC : après quoi on pourra connoître la hauteur AC : car dans le triangle rectangle BAC, on connoît l'angle C qui est droit ; on connoît aussi l'angle ABC qu'on a mesuré, & d'ailleurs on a trouvé le côté AB, qui est un rayon visuel ; d'où il suit qu'on pourra trouver aussi le reste du triangle par le premier Problême ; ainsi on pourra connoître non-seulement la hauteur AC, mais aussi la ligne BC, qui est la distance du point B au centre de la tour. Fig. 12.

On peut de la même maniere mesurer la hauteur d'une montagne, en choisissant deux stations au bas de la montagne, desquelles on puisse voir le sommet.

PROBLEME VIII.

71. *Trouver la distance de deux objets inaccessibles tels que* C & D.

Fig. 15. Prenez deux ſtations, comme A & B, deſquelles on puiſſe appercevoir les deux objets, & meſurez l'intervalle de ces ſtations; enſuite du point A meſurez l'angle DAB & l'angle CAB, formez tous les deux par des rayons viſuels: du point B, meſurez auſſi les angles CBA & DBA, formez pareillement par des rayons viſuels; ainſi dans le triangle BDA, on connoîtra les deux angles DAB & DBA, & le côté AB qui eſt l'intervalle des ſtations; par conſéquent on trouvera le côté BD par le premier Problême. De même dans le triangle ACB, on connoîtra les deux angles CBA & CAB, & le côté AB; par conſéquent on trouvera auſſi BC. Enfin on conſiderera un troiſiéme triangle, qui eſt CBD, dont on connoît déja les deux côtez BD & BC; ainſi ſi l'on meſure l'angle compris DBC, on pourra trouver par le ſecond Problême le côté CD, qui eſt la diſtance cherchée.

On voit bien que par le moyen des deux premiers triangles BDA & ACB, on peut trouver les diſtances de chaque ſtation aux deux objets inacceſſibles.

PROBLEME IX.

72. *Lever la carte d'un Pays par les regles de la Trigonométrie.*

Pour lever une carte, il ne s'agit que de marquer ſur un plan la ſituation des objets les uns à l'égard des autres, c'eſt-à-dire, le rapport des diſtances qui ſe trouvent entre les objets les plus remarquables qui ſont dans le pays dont on veut faire la carte, tels que ſont les Villes, les Bourgs, les Villages, les Abbayes, &c. que l'on ſuppoſe deſignés dans la 71me Figure, Planche VIII. par les lettres C, D, E, F, G, H, L. Or les diſtances des objets ſe trouvent par la Trigonométrie en concevant des lignes qui forment des triangles dont les ſommets ſe terminent à ces objets. Voici donc com-

Fig. 71. Planch. VIII.

ment on peut executer ce que l'on propose dans le Problême.

Prenez une base, c'est-à-dire, la distance de deux points tels que A & B : il faut pour cela mesurer actuellement avec une ou plusieurs perches égales, ou avec une chaîne, la longueur du chemin depuis A jusqu'à B en allant toûjours en ligne droite : mais pour faire la carte avec exactitude, il faut que cette base ait une longueur proportionnée à celle du terrein dont on veut lever la carte : par exemple, s'il s'agit de lever la carte d'une Province, il faut prendre une base d'environ 2 ou 3 mille toises. Après cela mesurez les angles DAB, EAB, FAB, HAB, LAB, formez par la base AB, & par les rayons visuels qui partent des objets D, E, F, H, L, que l'on peut voir du point A : ensuite allez à la seconde station B, & mesurez aussi les angles DBA, EBA, FBA, HBA, LBA formez par la même base AB, & par les rayons visuels qui viennent au point B des objets D, E, F, H, L que l'on suppose pouvoir être apperçûs de ce point : on aura des triangles dont on connoîtra un côté, sçavoir, la base AB & les deux angles sur ce côté : par exemple, dans le triangle AEB on connoîtra le côté AB & les deux angles EAB & EBA : ainsi par le moyen du premier Problême général on trouvera facilement les deux autres côtez AE & BE.

On n'a pas pris la mesure des angles CAB & GBA, parce qu'ils sont trop obtus : mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse avoir la situation des points C & G : pour cela il faut prendre un des côtez de quelque triangle connu pour base (On suppose qu'on a trouvé la longueur de ce côté par le moyen de la premiere base AB.) Ainsi pour déterminer la position du point C je puis me servir de la ligne AD, qui est un des côtez du triangle ADB. Je prends donc la mesure de l'angle CAD, & ensuite celle de l'angle ADC :

ainsi dans le triangle ACD je connois un côté, sçavoir, AD, & les deux angles sur ce côté : donc je trouverai les deux côtez AC & DC qui déterminent la position du point C.

S'il y a d'autres objets dont on veuille déterminer la position, & que l'on ne puisse appercevoir des stations A & B, il faut choisir une nouvelle base qui soit un des côtez de quelque triangle connu, en sorte que l'on puisse voir cet objet des deux extrémitez de cette base : par exemple, si on ne peut voir le point O de la station A, on pourra prendre pour base le côté FG que je suppose connu par le moyen du triangle BGF, & mesurer les angles OFG & OGF, afin de trouver les côtez FO & GO. Il faut employer la même méthode pour les objets plus éloignés.

Quand on aura trouvé la longueur des côtez des triangles, il sera aisé d'en marquer la situation sur une carte à l'aide d'une échelle dont on se servira, comme nous l'avons dit, en proposant la seconde méthode de résoudre les triangles indépendamment des tables des sinus. On prendra donc d'abord sur cette échelle avec un compas autant de parties égales qu'il y a par exemple de perches dans la base AB; & on marquera sur la carte une ligne droite *ab* égale à l'ouverture du compas : les deux extrémitez de cette ligne représenteront les deux stations A & B : ensuite pour marquer la position du point E on prendra sur l'échelle avec le compas autant de parties égales qu'il y a de perches dans la ligne AE, & ayant mis une pointe du compas sur l'extrémité *a* de la ligne, on décrira un petit arc du côté qui répond au point E : ensuite on prendra pareillement sur l'échelle autant de parties égales qu'il y a de perches dans BE, & ayant posé une pointe du compas sur l'extrémité *b* de la ligne on décrira un autre arc qui coupe le premier : l'intersection des deux arcs marquera la position du point E par rap-

port

port aux deux points A & B. On fera de même pour les autres points.

73. On pourroit se dispenser de la peine de chercher tous les côtez des triangles, il suffiroit après avoir mesuré la base AB, & pris avec un instrument la grandeur des deux angles de chaque triangle, il suffiroit, dis-je, de faire des triangles semblables à ceux qui sont formez sur le terrain par la base & les rayons visuels, selon que nous l'avons expliqué dans la seconde méthode de résoudre les triangles : ces triangles que l'on feroit détermineroient la position des objets.

Nous omettons plusieurs observations qui sont d'usage dans la pratique de lever des cartes, parce qu'il ne s'agit ici que de faire voir l'application de la Trigonométrie dans cette opération.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent, peut suffire pour faire voir l'utilité de la Trigonométrie : néanmoins afin de faire encore mieux sentir la subtilité de cet Art, nous allons proposer un Problême, par lequel on verra que l'on peut par le moyen de la Trigonométrie, trouver la distance des planetes à la terre.

PROBLEME X.

74. *Trouver la distance de la Lune à la Terre.*

Dans la Fig. 14, le petit cercle dont C est le centre, Fig. 14.
& CT le rayon, représente la terre, la ligne HB qui touche la terre, représente l'horison sensible ; le petit globe L qui est dans le plan de l'horison, représente la Lune ; l'autre globe I qui répond aussi au plan de l'horison, représente Jupiter : enfin FOB est une partie du firmament, auquel on rapporte les planetes.

Si on voyoit la Lune du centre C de la terre, on la rapporteroit au point O du firmament : mais si on regardoit la Lune du point T, on la rapporteroit à un point inférieur du firmament, sçavoir, au point B. Le point O auquel on rapporteroit la Lune vûe du cen-

tre de la terre, eſt appellé *le lieu vrai* de la Lune; & le point B auquel on la rapporte étant vûe de deſſus la ſurface de la terre, eſt nommé *le lieu apparent* de la Lune; & l'arc OAB compris entre ces deux points, eſt appellé *parallaxe*. Or le firmament étant à une diſtance immenſe de la terre, de la Lune & des autres planetes, on peut regarder chacune des planetes comme le centre du firmament; ainſi l'arc OB eſt la meſure de l'angle OLB & de l'angle CLT oppoſé au ſommet; c'eſt pourquoi l'un & l'autre de ces deux angles eſt encore appellé *parallaxe*. Tout cela poſé, voici comme on trouve la diſtance de la Lune à la terre.

Le triangle TCL formé par le rayon de la terre CT, & par les rayons viſuels CL & TL eſt rectangle, parce que le rayon de la terre eſt perpendiculaire à la tangente HB qui repréſente l'horiſon ſenſible (Liv. I. Art. 115.); ainſi l'angle T eſt droit. D'ailleurs on connoît l'angle CLT meſuré par la parallaxe horiſontale OB que l'on trouve dans les tables aſtronomiques. Mais on connoît encore le côté CT qui eſt un rayon de la terre que l'on ſçait être de 1432 lieuës communes de France, dont chacune contient 2282 toiſes; ainſi on pourra trouver par le premier problême le côté CL, qui eſt la diſtance de la Lune au centre de la terre.

La Lune n'eſt pas toûjours également éloignée de la terre: mais ſi on la prend dans ſa moyenne diſtance, on trouve que l'angle L eſt d'environ un degré, lorſque la Lune répond au plan de l'horiſon; on aura donc la proportion ſuivante: le ſinus de l'angle d'un dégré eſt au côté CT, qui eſt un demi-diametre de la terre, comme le ſinus de l'angle droit eſt à CL. Voici cette proportion: $1745 . 1 :: 100000 . CL = 57\frac{535}{1745}$.

Ainſi le côté CL, qui eſt la diſtance de la Lune au centre de la terre, eſt d'environ 57 demi-diametres de la terre; par conſéquent la moyenne diſtance de la Lune à la terre, marquée par DL, n'eſt que de 56

demi-diamettes, qui font environ 80000 lieuës.

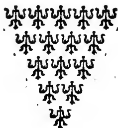
75. Remarquez que la parallaxe d'une planete est d'autant plus petite que la planete est plus éloignée de la terre : par exemple, la parallaxe de Jupiter supposé en I est moindre que celle de la Lune, comme on le voit sensiblement dans la Fig. 14 où la parallaxe de Jupiter est l'arc AB ou l'angle CIT. Cet angle est même si petit qu'il devient insensible, & que l'angle TCI est presque droit, aussi-bien que l'angle CTI, en sorte que les deux rayons visuels CI & TI sont sensiblement paralleles, à cause de la grande distance de Jupiter ; c'est pourquoi on ne pourroit pas se servir de cette méthode pour connoître la distance de Jupiter à la terre.

76. On peut remarquer de même par rapport aux hauteurs que l'on veut mesurer sur la terre, qu'il faut être à une distance médiocre de ces hauteurs, afin que l'erreur insensible qu'il n'est presque pas possible d'éviter, lorsqu'on prend l'angle de hauteur, en le faisant un peu trop grand ou un peu trop petit, ne cause pas une erreur trop considérable dans le calcul de la hauteur qu'on cherche. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mesurer la hauteur AC : si on observe du point D, & qu'au lieu de prendre l'angle ADC tel qu'il est, on le fasse un peu plus grand & égal à l'angle FDC ; il est visible que cette erreur fera la hauteur AC plus grande qu'elle n'est de la quantité FA qui est plus du quart de AC : mais si on mesure l'angle de hauteur au point B, & qu'au lieu de prendre l'angle ABC tel qu'il est, on fasse la même erreur qu'auparavant, en prenant EBC, en sorte que l'angle EBA soit égal à l'angle FDA ; il est évident que cette derniere erreur, quoiqu'égale à la premiere, ne fera la hauteur AC plus grande qu'elle n'est effectivement, que de la quantité EA, qui est beaucoup moindre que FA. Il en seroit de même, si on étoit de beaucoup plus près qu'il ne faut Fig. 16.

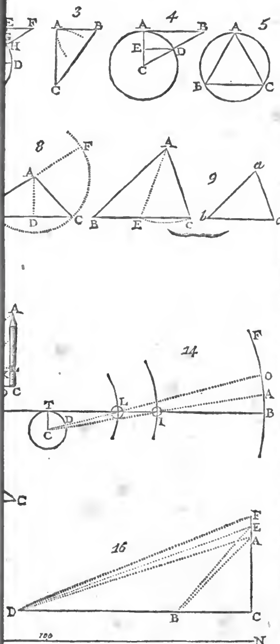
de la hauteur à meſurer. Ainſi il faut, afin de meſurer exactement une hauteur, qu'il y ait de la proportion entre la diſtance de l'obſervateur à l'objet & la hauteur de cet objet ; & ſi cette diſtance eſt égale à la hauteur, (ce qui arrive lorſque l'angle de hauteur eſt de 45 degrez) pour lors on eſt dans l'éloignement le plus favorable pour meſurer la hauteur.

77. Ce que l'on vient de dire touchant la meſure des hauteurs, doit auſſi s'entendre de la meſure de toute autre ligne, ſoit qu'elle marque la largeur ou la diſtance des objets ; en ſorte qu'il faut toujours que l'éloignement qui eſt entre l'obſervateur & la ligne à meſurer, ait quelque rapport ſenſible avec cette ligne.

FIN.



A01 1461421


3
4
5
8
9
14
16
E F
G
H
D
A B
C
A B
E D
C
A
B C
F
A
D C
A
B E C
a
b c
A
K
C
F
O
A
B
T
D
C
L
I
C
F
E
A
D B C
100
N

de
exa
ent
de
(c
gre
rab

de
to
di
l'é
me



TABLE DES ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des Lignes paralleles. 27

Des Lignes droites considérées par rapport au cercle. 36

De la mesure des angles qui n'ont pas leur sommet au centre du cercle. 47

Des Lignes proportionnelles. 54

LIVRE SECOND.

DES SURFACES ET DES FIGURES PLANES.

Des Figures planes considerées selon leurs côtez & leurs angles.

DES TRIANGLES. 76

Digitized by Google

Des Polygones réguliers. 108

Des Figures planes considerées selon leur surface. 128

Des Elemens & de l'égalité des surfaces. 129

De la mesure des Figures planes. 139

Du rapport des Surfaces. 148

LIVRE TROISIÉME.

Digitized by Google

Fin de la Table des Elémens de Géométrie.



DE LA TRIGONOMETRIE.

Fin de la Table de la Trigonométrie.

A01 1461421

Digitized by Google

01 1461421

Digitized by Google

Digitized by Google

64



